Modell-Theorie der Dynamik der Raum-Zeit auf der Basis unimodularer Drei-Metriken

Diplomarbeit

der Fakultät für Physik

der

Ludwig-Maximilians-Universität

München

vorgelegt von

Korbinian Sebastian Strimmer

München, im Juni 1994

Zusammenfassung

Es wird eine Modell-Theorie der Dynamik der Raum-Zeit auf der Basis der Dynamik einer dreidimensionalen unimodularen Metrik $\tilde{\gamma}_{ab}$ angegeben. Im Zentrum steht dabei eine Bewegungsgleichung für $\tilde{\gamma}_{ab}$ von zweiter Ordnung in den zeitlichen und von dritter Ordnung in den räumlichen Ableitungen. Die Bewegungsgleichung für $\tilde{\gamma}_{ab}$ hat im Vergleich zu den ADM-Gleichungen, die bei der (3+1)-Darstellung der Einsteinschen Gravitationstheorie auftreten, eine sehr einfache Gestalt. Sie lautet $DD\tilde{\gamma}_{ab} = \tilde{Y}_{ab}$. Dabei ist $\tilde{Y}_{ab}$ der York-Tensor der unimodularen Metrik $\tilde{\gamma}_{ab}$ und D ein geometrisch erweiterter Zeitableitungsoperator. Die Bewegungsgleichung unterliegt keinerlei Zwangsbedingungen. Um das gewöhnliche vierdimensionale Raum-Zeit-Bild wiederherzustellen, werden zwei aus der allgemeinen Relativitätstheorie bekannte elliptische Differentialgleichungen verwendet. Diese sind die Lichnerowicz-Gleichung und eine Blätterungsbedingung. Es wird gezeigt, daß die Schwarzschild-Metrik und die Friedmann-Metrik exakte Lösungen der Theorie sind. Der Grenzfall zur Newtonschen Gravitationstheorie wird erläutert. Ferner hergeleitet wird auch die linearisierte Version der Bewegungsgleichung. Es folgt eine Untersuchung möglicher Polarisationszustände der Gravitationswellen in der Modell-Theorie. Eine Analyse der Charakteristiken der Bewegungsgleichung wird durchgeführt und deren parabolischer Charakter untersucht. Wegen dieser parabolischen Form treten zusätzlich zu den Wellenlösungen auch einige andere Lösungen auf. Insbesondere tritt bei Gravitationswellen schon im Vakuum Dispersion auf. Solche Lösungen stehen *nicht* im Widerspruch zur speziellen Relativitätstheorie. Vergleiche mit anderen Theorien wie der Einstein-Fokkerschen Theorie (1914) und der Einsteinschen unimodularen Theorie (1919) werden gezogen. Im Ausblick wird die Möglichkeit von Solitonen als exakte Lösungen der Bewegungsgleichung $DD\tilde{\gamma}_{ab} = \tilde{Y}_{ab}$ erwogen und der weitere mögliche Ausbau der Theorie diskutiert.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung und Problemstellung

In der üblichen vierdimensionalen Formulierung der Einsteinschen Gravitationstheorie löst man die Feldgleichung

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} = 2\, T_{\mu\nu} \tag{1}$$

nach der vierdimensionalen Metrik $g_{\mu\nu}$ auf, d.h. man erhält die gesamte Raum-Zeit-Struktur in einem einzigen Schritt. Unter Preisgabe der expliziten vierdimensionalen Kovarianz ist es möglich, diese Gleichung in einer Hamiltonschen Form ähnlich der klassischen Mechanik zu schreiben[1]. Dabei spielt nach Arnowitt, Deser, und Misner (ADM) eine dreidimensionale Metrik γ_{ab} die Rolle der Ortsvariablen x und ein Tensorfeld Π^{ab} die Rolle des kanonisch konjugierten Impulses p. Es kann nun eine Hamilton-Funktion angegeben werden, die die zeitliche Entwicklung der beiden Tensorfelder bestimmt. Dieser Hamiltonian wird aus der Einstein-Hilbertschen-Langrangedichte

$$S = \frac{1}{4} \int d^4x \, \sqrt{-g}\, R \tag{2}$$

gewonnen. Die in diesem (3+1)-Formalismus auftretenden Hamiltonschen Gleichungen für γ_{ab} und Π^{ab} werden nach ihren Entdeckern ADM-Gleichungen genannt. Ist damit die zeitliche Entwicklung von γ_{ab} und Π^{ab} bekannt, kann man das gewohnte Raum-Zeit-Bild wiederherstellen und eine vierdimensionale Metrik errechnen. Es läßt sich zeigen, daß diese vierdimensionale Metrik tatsächlich wieder der ursprünglichen Einstein-Gleichung Gl. (1) genügt[1,32]. Im *nachhinein* stellt sich auch die physikalische Bedeutung von γ_{ab} und Π^{ab} heraus. Man findet, daß γ_{ab} der Metrik raumartiger Hyperflächen der Raum-Zeit entspricht und Π^{ab}

in Beziehung zur äußeren Krümmung dieser Hyperflächen steht. Die vierdimensionale Raum-Zeit wird in einer (3+1)-Formulierung der Einsteinschen Gravitationstheorie also in eine Blätterung von dreidimensionalen raumartigen Hyperflächen zerlegt, auf denen die Dynamik der dreidimensionalen Metrik stattfindet. In dieser Schreibweise der allgemeinen Relativitätstheorie treten wegen der Eichfreiheiten der Feldgleichung Gl. (1) zusätzlich zu den Bewegungsgleichungen für γ_{ab} vier Zwangsbedingungen auf, die als Hamiltonian-Constraint und als Momentum-Constraints bezeichnet werden[32]. Diese Zwangsbedingungen stellen nichtlineare und sogar nichtalgebraische Beziehungen (siehe Gl. (8) und Gl. (9)) zwischen der Metrik γ_{ab} und Π^{ab} dar, die auf jeder Hyperfläche, also für jeden beliebigen Zeitpunkt t erfüllt sein müssen. Die Felder γ_{ab} und Π^{ab} sind deshalb nicht unabhängig voneinander, wie man es zunächst für einen Hamiltonschen Formalismus erwarten würde. Betrachtet man das Anfangswertproblem für das Gravitationsfeld, so stellt man deshalb fest, daß auch zum Zeitpunkt $t = 0$ die Variablen γ_{ab} und Π^{ab} nicht frei wählbar sind. Das bedeutet, daß diese beiden Größen *nicht* geeignet sind, die sogenannten "wahren" dynamischen Freiheitsgrade des Gravitationsfeldes zu repräsentieren[17]. Diese Tatsache läßt sich auch aus der folgenden einfachen Überlegung erkennen. Aus Untersuchungen der linearisierten Einsteinschen Feldgleichung ergibt sich, daß das Gravitationsfeld in der Einsteinschen Theorie an jeder Stelle genau zwei Freiheitsgrade besitzt. Die dreidimensionale Metrik γ_{ab} enthält aber nach dem Abzug der allgemeinen Koordinatentransformationen, die immer zulässig sein müssen, drei voneinander unabhängige Funktionen. Das wiederum bedeutet, daß γ_{ab} ungeeignet ist, die zwei dynamischen Freiheitsgrade des Gravitationsfeldes zu verkörpern. Deshalb kommt von York[40,41] der Vorschlag, nur den konform invarianten Anteil der Metrik als das fundamentale dynamische Objekt in der allgemeinen Relativitätstheorie zu betrachten, und nicht die Metrik γ_{ab} selbst. Mit diesem konform invarianten Anteil, der z.B. durch eine unimodulare Metrik $\tilde{\gamma}_{ab}$ beschrieben werden kann, lassen sich keine Längen sondern nur noch Winkel auf den Hyperflächen messen. Während γ_{ab} die metrische Struktur einer Drei-Geometrie, d.h. eines dreidimensionalen Raumes beschreibt, definiert $\tilde{\gamma}_{ab}$ die Struktur einer sogenannten konformen Drei-Geometrie. York hat gezeigt, daß diese Konformstruktur im Anfangswertproblem im Gegensatz zu γ_{ab} frei vorgegeben werden kann und daß diese damit tatsächlich Träger der eigentlichen Freiheitsgrade des Gravitationsfeldes ist. Die Natürlichkeit dieses Ansatzes haben York und andere in verschiedenen Arbeiten immer wieder herausgehoben[23,45]. Es stellt sich nun die Frage, ob es möglich ist, aus den Bewegungsgleichungen für die Metrik γ_{ab}, die man ja als ADM-Gleichungen gegeben hat, diejenigen Gleichungen auszusondern, die für die dynamische Entwicklung der Konformstruktur verantwortlich sind. Bis heute ist es jedoch nicht gelungen, ein solches Gleichungssystem explizit anzugeben, das es erlaubt, die allgemeine Relativitätstheorie als Theorie der zeitlichen Entwicklung konformer Drei-Geometrien zu betrachten[9,16,17].

In dieser Arbeit wird eine von der Einsteinschen Theorie verschiedene, durch die obige Problemstellung motivierte und vom Autor entwickelte Modell-Theorie der Dynamik der Raum-Zeit beschrieben. Diese Theorie ist wie die ADM-Theorie in der (3+1)-Sprache formuliert. In ihr wird *eine Möglichkeit* aufgezeigt, wie eine möglichst einfache Bewegungsgleichung für die unimodulare Metrik $\tilde{\gamma}_{ab}$, die die Dynamik der konformen Drei-Geometrie beschreiben soll, konstruiert und explizit angegeben werden kann. Diese Bewegungsgleichung ist von zweiter Ordnung in der Zeit und von dritter Ordnung in den räumlichen Ableitungen. Zusätzlich zu dieser Gleichung treten zwei aus der Relativitätstheorie bekannte elliptische Gleichungen auf, die mithelfen, das bekannte vierdimensionale Raum-Zeit-Bild wiederherzustellen. Im Gegensatz zu den ADM-Gleichungen treten dagegen keinerlei Zwangsbedingungen auf. Es wird gezeigt, daß die Schwarzschild-Metrik und die Friedmann-Metrik Lösungen der hier vorgestellten Theorie sind. Der Grenzfall zur Newtonschen Gravitationstheorie wird danach diskutiert. Anschließend wird die linearisierte Version der Bewegungsgleichung für $\tilde{\gamma}_{ab}$ hergeleitet. Eine Lösung für eine Quadrupol-Welle, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet, wird angegeben. Wegen der parabolischen Form der Bewegungsgleichung, die wir bei einer Analyse der Charakteristiken der Bewegungsgleichung feststellen, lassen sich jedoch auch Lösungen angeben, die in der allgemeinen Relativitätstheorie nicht vorkommen. Insbesondere tritt bei Gravitationswellen schon im Vakuum Dispersion auf, wobei die Ausbreitungsgeschwindigkeit die Lichtgeschwindigkeit überschreiten kann. Diese Eigenschaft steht aber *nicht* im Widerspruch mit der speziellen Relativitätstheorie[38]. Ein kurzer Vergleich der hier vorgestellten Theorie mit der Einstein-Fokker-Theorie von 1914 und der unimodularen Theorie von Einstein von 1919 wird gezogen und ein Ausblick auf einen möglichen Ausbau der Theorie gegeben. Zunächst folgt jedoch in den beiden folgenden Kapiteln eine knappe Darstellung der Arnowitt-Deser-Misner-Gleichungen und der Yorkschen Lösung des Anfangswertproblems. Eine Liste der wichtigsten in dieser Arbeit verwendeten Symbole und ein Verweis auf die verwendeten Konventionen findet sich im Anhang. Insbesondere nehmen alle elementaren Konstanten wie z.B. die Lichtgeschwindigkeit c den Wert eins an. Bei der der Gravitationskonstante setzen wir $4\pi G = 1$.

2. Die ADM-Gleichungen

In diesem Kapitel werden wir sehen, wie sich die ursprünglich vierdimensional formulierte Einsteinsche Feldgleichung in eine dreidimensional kovariante Bewegungsgleichung, in der Raum und Zeit als getrennte Aspekte angesehen werden, umschreiben läßt. Diese Darstellungsart bezeichnet man als (3+1)-Formulierung der allgemeinen Relativitätstheorie. Im folgenden betrachten wir aus Vereinfachungsgründen die Einstein-Gleichungen im Vakuum, d.h. wir setzen $T_{\mu\nu} = 0$. Die Feldgleichung Gl. (1) wird dann zu

$$R_{\mu\nu} = 0\,. \tag{3}$$

Untersucht man diese Gleichung etwas genauer, so stellt man fest, daß die Zeit-Raum- und Zeit-Zeit-Komponenten von $R_{\mu\nu}$ im Gegensatz zu den Raum-Raum-Komponenten keine zweiten Zeitableitungen enthalten. Diese vier Gleichungen $R_{0\mu} = 0$ stellen damit gewisse Beziehungen, die sogenannten Zwangsbedingungen, zwischen den Komponenten der Metrik und deren ersten Zeitableitungen dar. Die restlichen sechs Gleichungen von zweiter Ordnung in der Zeit—die sechs räumlichen Komponenten von $R_{\mu\nu}$ gleichgesetzt mit null—werden in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung umgeformt. Arnowitt, Deser, und Misner haben als erste diese ingesamt 16 Gleichungen explizit angegeben[1]. In der Notation von Isenberg[17,18], welche die ADM-Gleichungen in ein sehr kompaktes Format bringt, wird als grundlegendes dynamisches Element die dreidimensionale positiv definite Metrik γ_{ab} verwendet. Sie ist wie alle folgenden Tensoren auf einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit Σ^3 definiert. In der originalen Fassung von Arnowitt, Deser, und Misner spielt nun eine Tensordichte Π^{ab} die Rolle eines kanonisch konjugierten "Impulses". Isenberg verwendet stattdessen—um die Gleichungen zu vereinfachen—einen symmetrischer Tensor K_{ab}, der eine verallgemeinerte “Geschwindigkeit” beschreibt, die durch

$$\frac{d}{dt}\gamma_{ab} - \pounds_M \gamma_{ab} = -2NK_{ab} \tag{4}$$

definiert ist[17]. Dabei ist $\pounds_M \gamma_{ab}$ die Lie-Ableitung von γ_{ab} entlang des Shift-Vektors M^a mit

$$\pounds_M \gamma_{ab} = \nabla_a M_b + \nabla_b M_a \,. \tag{5}$$

Die Lapse-Funktion N und die Shift-Funktionen M^a sind beliebige, frei wählbare Funktionen der Koordinatenzeit t und der räumlichen Koordinaten. Sie werden weder von den Bewegungsgleichungen noch von irgendwelchen sonstigen Gleichungen bestimmt oder eingeschränkt. Diese Funktionen beschreiben—nachdem die Raum-Zeit rekonstruiert ist—die raumartige Hyperfläche, auf der die Metrik γ_{ab} definiert ist[21]. Aus der (3+1)-Sichtweise sorgen die Lapse-Funktion und der Shift-Vektor für die aktive Änderung der Koordinaten[11]. Die zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit K_{ab} wird wiederum kontrolliert von der Gleichung[17]

$$\frac{d}{dt}K^c_d - \pounds_M K^c_d = N\left(R^c_d + K^c_d \ \mathrm{tr}\, K\right) - \nabla^c \nabla_d N \,. \tag{6}$$

Dabei ist $\pounds_M K^c_d$ die Lie-Ableitung von K^c_d entlang des Shift-Vektors M^a mit

$$\pounds_M K^c_d = M^a \nabla_a K^c_d + K^c_a \nabla_d M^a - K^a_d \nabla_a M^c \,. \tag{7}$$

Die Gleichungen Gl. (4) und Gl. (6) sind die ADM-Bewegungsgleichungen für die Metrik γ_{ab}. Sie bilden ein gekoppeltes Gleichungssystem erster Ordnung. Gibt man für $t = 0$ die Metrik γ_{ab} und die Geschwindigkeit K_{ab} in geeigneter Weise vor, so kann man mit Hilfe dieser zwölf Gleichungen γ_{ab} und K_{ab} in die Zukunft bzw. Vergangenheit weiterentwickeln[4]. Wie wir am Anfang gesehen haben, bestehen jedoch gewisse Beziehungen zwischen der vierdimensionalen Metrik und deren Zeitableitung, die sich in den vier Gleichungen $R_{0\mu} = 0$ verbergen. In

(3+1)-Schreibweise treten entsprechend Zusammenhänge zwischen γ_{ab} und K_{ab} auf. Zum einen muß der sogenannte Hamiltonian-Constraint

$$R + (\mathrm{tr}\, K)^2 - K^m_n K^n_m = 0 \tag{8}$$

für alle Zeiten erfüllt sein. Zum anderen muß auch den Momentum-Constraints

$$\nabla_a K^a_b - \nabla_b\, (\mathrm{tr}\, K) = 0 \tag{9}$$

Genüge geleistet werden. Die Bezeichnungen der Zwangsbedingungen lehnen sich an die originale ADM-Formulierung[1], in der eine Hamilton-Funktion und ein "Impuls" Π^{ab} vorkommt, an. Es läßt sich zeigen[11,17], daß bei Erfüllung der Zwangsbedingungen Gl. (8) und Gl. (9) zum Zeitpunkt $t = 0$ die Bewegungsgleichungen Gl. (4) und Gl. (6) automatisch dafür sorgen, daß die Zwangsbedingungen auch in der die Zukunft bzw. Vergangenheit erhalten sind. Die Existenz der Constraints führt folglich dazu, daß im Anfangswertproblem γ_{ab} und K_{ab} nicht unabhängig voneinander vorgegeben werden können. Zum Zeitpunkt $t = 0$ müssen der Hamiltonian-Constraint und die Momentum-Constraints erfüllt sein. Ist diese Voraussetzung erfüllt, so erhält man das vierdimensionale Raum-Zeit-Linienelement mittels[17]

$${}^{(4)}ds^2 = \gamma_{ab}\, (dx^a + M^a dt)(dx^b + M^b dt) - N^2 dt^2\,. \tag{10}$$

Die der vierdimensionalen Metrik zugrundeliegende Mannigfaltigkeit ist dabei notwendigerweise $\Sigma^3 \times R^1$. *Nachdem* die Vierer-Geometrie aus der Lösung der Bewegungsgleichungen für γ_{ab} rekonstruiert ist, lassen sich γ_{ab} als Metrik einer raumartigen Hyperfläche der Raum-Zeit und K_{ab} als die dazugehörige äußere Krümmung interpretieren. Die genaue Lage der Hyperfläche wird dabei von der Lapse-Funktion und dem Shift-Vektor M^a bestimmt. Der Beweis der tatsächlichen Äquivalenz der hier nur angeschriebenen ADM-Gleichungen und der vier

Zwangsbedingungen wird über eine recht mühsame Umformulierung der Einstein-Hilbertschen Langrange-Dichte

$$S = \frac{1}{4} \int d^4x \, \sqrt{-g} \, R \tag{11}$$

geführt[21,32]. Man erhält in dreidimensionaler Schreibweise

$$S' = \frac{1}{4} \int dt \, d^3x \; N \sqrt{\gamma} \left(R - (\mathrm{tr}\, K)^2 + K_n^m K_m^n \right) \; . \tag{12}$$

Nach den Standard-Verfahren kann man nun einen Hamiltonian und die dazugehörigen Gleichungen berechnen. Dabei müssen allerdings einige Eigenheiten berücksichtigt werden, da wegen der allgemeinen Kovarianz von Gl. (12) der sog. "Constrained Hamiltonian"-Formalismus benutzt werden muß[32]. Es ergeben sich letztendlich die obigen Bewegungsgleichungen und Constraints.

Eine Erweiterung der hier angegebenen ADM-Bewegungsgleichungen und Zwangsbedingungen im Vakuum auf den Fall $T_{\mu\nu} \neq 0$ ist relativ einfach. Der Hamiltonian-Constraint wird z.B. zu

$$R + (\mathrm{tr}\, K)^2 - K_n^m K_m^n = 4\rho \, ; \tag{13}$$

ρ ist dabei die Energiedichte. Auch in den Bewegungsgleichungen treten dann Terme auf, in denen ρ und ein Spannungstensor S_{ab}, der den räumlichen Anteil des Energie-Impuls-Tensors T_{ab} darstellt, vorkommen. Einzelheiten dazu werden werden z.B. in Ref. 45 beschrieben.

Die Existenz der vier gekoppelten, im höchsten Grad nichtlinearen Zwangsbedingungen Gl. (8) und Gl. (9) zeigt direkt an, daß γ_{ab} und K_{ab} nicht die "wahren" Freiheitsgrade des Gravitationsfeldes repräsentieren können. Man kann wegen diesen vier Bedingungen im Anfangswertproblem die Metrik γ_{ab} und deren Geschwindigkeit nicht unabhängig voneinander vorgeben. Von den insgesamt 12 unabhängigen Komponenten von γ_{ab} und K_{ab} kann man abzüglich von vier Koordinatenbedingungen und abzüglich der vier Zwangsbedingungen nur 4 Komponenten frei bestimmen, d.h. das Gravitationsfeld besitzt nach der üblicher

Zählung genau zwei dynamische Freiheitsgrade. Die schwierige Frage, die sich nun stellt, ist, welche Komponenten von γ_{ab} bzw. von K_{ab} als unabhängig und damit als Träger der gravitativen Freiheitsgrade zu betrachten sind und welche nicht. Eine mögliche Wahl lautet, die dreidimensionale Metrik γ_{ab} vorzugeben und K_{ab} bis auf zwei Komponenten vollständig aus den Zwangsbedingungen zu berechnen. Dies führt zum sogenannten Superspace-Bild der Geometrodynamik[8,37]. Ein andere wesentlich elegantere Möglichkeit stammt von York und beruht auf der Verwendung von konform invarianten Metriken[41]. Dabei wird als Träger der Freiheitsgrade des Gravitationsfeldes der konform invariante Teil der Metrik γ_{ab} benützt. Dieses Verfahren werden wir im nächsten Kapitel genauer beschreiben und zeigen, wie natürlich damit das Anfangswertproblem der allgemeinen Relativitätstheorie gelöst werden kann.

3. Lösung des Anfangswertproblems nach York

Mit der Metrik γ_{ab} lassen sich mit Hilfe der Riemannschen Gleichung

$$ds^2 = \gamma_{ab}\, ds^a ds^b \tag{14}$$

infinitesimale Wegstrecken ds messen. Wir betrachten nun eine konforme Transformation dieser Metrik nach

$$\gamma'_{ab} = \Phi^4 \gamma_{ab}\,, \tag{15}$$

wobei Φ eine beliebige Funktion der Koordinaten ist. Die von der Metrik γ'_{ab} gemessenen Abstände ds' wachsen im Vergleich zu den Abständen , die von γ_{ab} bestimmt werden, um den Faktor Φ^2. Es läßt sich jedoch leicht zeigen, daß die von γ_{ab} bzw. γ'_{ab} über die Beziehung

$$cos\ \theta = \frac{\gamma_{ab}\, F^a G^b}{\left(\gamma_{cd}\, F^c F^d\, \gamma_{ef}\, G^e G^f\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{16}$$

bestimmten Winkel θ invariant gegenüber den konformen Transformationen nach Gl. (15) sind[12]. F und G sind dabei die beiden Vektoren, zwischen denen der Winkel θ gemessen wird. Man kann deshalb von der Metrik γ_{ab} einen beliebigen Faktor Φ abspalten, ohne daß sich die dadurch definierten Winkel in irgendeiner Weise verändern. Alle durch eine konforme Transformation verbundenen Metriken sind deshalb in Bezug auf die Winkelmessung äquivalent. Wir heben nun aus dieser Gruppe von Metriken eine Metrik durch eine Koordinatenbedingung besonders heraus. Üblicherweise fordert man für diese Metrik

$$\det \tilde{\gamma}_{ab} = 1\,. \tag{17}$$

Diese auf eins normierte Metrik $\tilde{\gamma}_{ab}$ soll nun den konform invarianten Teil—also den Anteil, der für die Winkel-Messung zuständig ist—einer beliebigen Metrik

γ_{ab} darstellen. Die unimodulare Metrik $\tilde{\gamma}_{ab}$ besitzt wegen der Normierungsbedingung Gl. (17) in drei Dimensionen fünf unabhängige Komponenten. Da wir zusätzlich drei Koordinatenbedingungen stellen können, sieht man leicht, daß $\tilde{\gamma}_{ab}$ genau zwei von Koordinaten unabhängige Funktionen enthält. Von York stammt nun der Vorschlag, im Arnowitt-Deser-Misner-Formalismus nicht die Metrik γ_{ab} sondern $\tilde{\gamma}_{ab}$ als das Objekt zu betrachten, das die zwei Freiheitsgrade der Einsteinschen Gravitationstheorie repräsentiert. Diese Interpretation ist deshalb sehr natürlich, weil sowohl $\tilde{\gamma}_{ab}$ als auch das Gravitationsfeld nach der üblichen Zählung zwei freie Funktionen enthält. Den konformen Faktor ϕ, der mittels

$$\gamma_{ab} = \phi^4 \, \tilde{\gamma}_{ab} \tag{18}$$

die unimodulare Metrik $\tilde{\gamma}_{ab}$ in die volle räumliche Metrik γ_{ab} überführt, werden wir später aus einer elliptischen Differentialgleichung berechnen. ϕ ist im Gegensatz zu $\tilde{\gamma}_{ab}$ nicht frei wählbar.

Wir betrachten jetzt das Anfangswertproblem der allgemeinen Relativitätstheorie in Gestalt der Arnowitt-Deser-Misner Gleichungen. Da die ADM-Gleichungen ein System zweiter Ordnung in der Zeit darstellen, erwartet man, daß die Metrik γ_{ab} und die Zeitableitung von γ_{ab} frei vorgeben werden können. Wie in den beiden vorhergehenden Kapiteln erklärt, wird genau das von vier Zwangsbedingungen verhindert. Es sei nun mit York[40] angenommen, daß die Spur des Tensors K_{ab} verschwindet. Dieser spurfreie symmetrische Tensor sei mit A_{ab} bezeichnet. Die Momentum-Constraints Gl. (9) werden damit zu

$$\nabla_a A^a_b = 0\,. \tag{19}$$

Diese Zwangsbedingung fordert die Transversalität von A_{ab}. Dabei bleibt zunächst offen, auf welche Metrik sich die kovariante Ableitung beziehen soll. Da wir uns festgelegt haben, daß wir nicht γ_{ab} sondern nur $\tilde{\gamma}_{ab}$ frei vorgeben und wir daher zunächst nur $\tilde{\gamma}_{ab}$ als bekannt voraussetzen können, setzen wir die kovariante Ableitung in Zusammenhang mit $\tilde{\gamma}_{ab}$ und schreiben diese Zwangsbedingung als

$$\tilde{\nabla}_a \tilde{A}^a_b = 0\,. \tag{20}$$

Dabei haben wir den spurfreien Tensor $\tilde{A}_{ab}$ mit einer Tilde versehen, um zu kennzeichnen, daß er bezüglich der unimodularen Metrik $\tilde{\gamma}_{ab}$ transversal sein soll. Die kovariante Ableitung zeigt ebenfalls durch die Tilde über dem Nabla-Symbol an, daß sie mit $\tilde{\gamma}_{ab}$ kompatibel ist. Nehmen wir nun an, ein spurfreies $\tilde{A}_{ab}$ sei gefunden, das die Bedingung Gl. (19) erfüllt.

Wir versuchen nun, die letzte noch bleibende Zwangsbedingung—den Hamiltonian-Constraint—zu erfüllen. Für ein spurfreies $\tilde{A}_{ab}$ lautet der Hamiltonian-Constraint einfach

$$R = \tilde{A}^m_n \tilde{A}^n_m\,. \tag{21}$$

R ist dabei der Krümmungsskalar der dreidimensionalen Metrik γ_{ab}. Die Krümmungsskalare der beiden Metriken γ_{ab} und $\tilde{\gamma}_{ab}$, welche über obige Beziehung Gl. (18) verbunden sind, stehen selber in dem bekannten Zusammenhang[12]

$$R = \tilde{R}\,\phi^{-4} - 8\phi^{-5}\,\tilde{\gamma}^{cd}\,\tilde{\nabla}_c\tilde{\nabla}_d\phi\,. \tag{22}$$

Damit kann man jetzt im Hamiltonian-Constraint die von γ_{ab} abhängige Größe R durch den lediglich von $\tilde{\gamma}_{ab}$ abhängenden Krümmungsskalar $\tilde{R}$ ausdrücken. Gl. (21) verwandelt sich dadurch von einer Zwangsbedingung für γ_{ab} zu einer elliptischen Differentialgleichung, die den konformen Faktor ϕ bestimmt. Sie lautet nun

$$\tilde{R}\,\phi^{-4} - 8\phi^{-5}\,\tilde{\gamma}^{cd}\,\tilde{\nabla}_c\tilde{\nabla}_d\phi = \tilde{A}^m_n \tilde{A}^n_m\,. \tag{23}$$

Dies ist im wesentlichen die Form der Differentialgleichung für ϕ, die auch wir im späteren Teil dieser Arbeit verwenden werden, um den kinematischen Anteil ϕ der Raumgeometrie zu rekonstruieren.

York schlägt nun zusätzlich vor, mit dem konformen Faktor ϕ nicht nur die frei vorgegebene Metrik $\tilde{\gamma}_{ab}$ auf γ_{ab} zu transformieren, sondern auch das spurfreie $\tilde{A}_{ab}$, das den Momentum-Constraints genügt, mit einer Potenz von ϕ zu versehen und entsprechend zu transformieren. Wenn man nämlich den Tensor $\tilde{A}_{ab}$ nach der Vorschrift

$$A_{ab} = \phi^{-2}\,\tilde{A}_{ab} \tag{24}$$

zusammen mit der unimodularen Metrik $\tilde{\gamma}_{ab}$ transformiert, so ergibt sich die folgende nützliche Eigenschaft. Man zeigt nämlich dann leicht, daß wenn zunächst

$$\tilde{\nabla}_a \tilde{A}^a_b = 0 \tag{25}$$

erfüllt ist, daß dann mit den Transformationen Gl. (18) und Gl. (24) auch

$$\nabla_a A^a_b = 0 \tag{26}$$

gilt. Das bedeutet, daß wenn die Momentum-Constraints von $\tilde{A}_{ab}$ in Bezug auf $\tilde{\gamma}_{ab}$ erfüllt sind, auch das transformierte A_{ab} in Bezug auf die komplette Metrik γ_{ab} die Momentum-Constraints erfüllt. Die Transformation Gl. (24) muß nun natürlich auch im Hamiltonian-Constraint berücksichtigt werden. Dieser lautet damit in der endgültigen Yorkschen Form

$$\tilde{R}\,\phi^{-4} - 8\phi^{-5}\,\tilde{\gamma}^{cd}\,\tilde{\nabla}_c\tilde{\nabla}_d\phi = \tilde{A}^{mn}\tilde{A}_{nm}\,\phi^{-12}\,. \tag{27}$$

Der Faktor ϕ^{-12} setzt sich aus ϕ^{-2} für $\tilde{A}_{nm}$ und aus $\phi^{-10} = \phi^{-2}\cdot\phi^{-4}\cdot\phi^{-4}$ für $\tilde{A}^{nm}$ zusammen. Der Faktor ϕ^{-4} kommt jeweils durch das Anheben der Indizes mit $\tilde{\gamma}^{ab}$ zustande. Gleichung (27) ist eine partielle elliptische Differentialgleichung und benötigt als solche—um eine eindeutige Lösung nach ϕ zu ermöglichen— die Vorgabe von Randbedingungen. Üblicherweise fordert man, daß der Skalenfaktor ϕ im Unendlichen gegen eins streben soll. Damit lassen sich für die Differentialgleichung Gl. (27) weitreichende Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen aufstellen, so daß eine eindeutige Lösung ϕ als gesichert angenommen werden darf[4,22,24]. Wir bemerken, daß wir damit die Zwangsbedingungen für den Fall $\operatorname{tr} K = 0$ derartig umgeformt haben, daß im Anfangswertproblem direkt $\tilde{\gamma}_{ab}$ und ein transversaler und spurfreier Tensor $\tilde{A}_{ab}$ vorgeben werden kann, ohne daß irgendeine eigentliche Zwangsbedingung mehr gelöst werden muß. Wir sehen direkt aus den Anfangswert-Gleichungen, daß man $\tilde{\gamma}_{ab}$ und die dazugehörige "Geschwindigkeit" $\tilde{A}_{ab}$ als die uneingeschränkten wahren Freiheitsgrade der Geometrodynamik betrachten kann.

Um das angegebene Verfahren zu komplettieren, hat York ein Verfahren auf der Basis einer konform invarianten Zerlegung von symmetrischen Tensoren angegeben[42,43,44], das aus einem beliebigen symmetrischen Tensor den spurfreien transversalen Teil aussondert. Dieser Teil kann dann als $\tilde{A}_{ab}$ verwendet werden. Dabei wird auch die Zwangsbedingung aus Gl. (26) in eine Differentialgleichung umgewandelt, so daß dann alle vier Zwangsbedingungen als elliptische Differentialgleichungen geschrieben werden können. Diese sehr elegante Technik soll hier aber nicht weiter erläutert werden, da sie im Folgenden keine Rolle spielt. Es stellt sich außerdem heraus, daß es möglich ist, die Einschränkung $\operatorname{tr} K = 0$ fallen zu lassen. Diese Koordinatenbedingung stellt sicher, daß die mittlere äußere Krümmung der raumartigen dreidimensionalen Hyperfläche gleich null ist. Man bezeichnet solche Hyperflächen auch als maximale Hyperflächen. Bei numerischen Rechnungen in der Relativitätstheorie sind diese Hyperflächen sehr beliebt, weil sie sogenannte Antifokussierungseigenschaften besitzen[29]. Viele wichtige Lösungen besitzen Blätterungen der Raum-Zeit aus derartigen maximalen Hyperflächen. Eine wichtige Ausnahme sind allerdings die bekannten kosmologischen Lösungen, die nur eine einzige maximale Hyperfläche—nämlich dort wo sich die Expansion zur Kontraktion umwandelt—besitzen. Dafür kann man in diesen Lösungen Blätterungen aus Hyperflächen mit $\operatorname{tr} K = \tau$ finden[20], wobei τ

räumlich konstant ist. τ kann aber wohlgemerkt trotzdem eine Funktion der Zeit sein, da sich die Konstanz nur auf die räumliche Ableitungen bezieht. Es stellt sich heraus, daß diese Konstante τ im Anfangswertproblem *zusätzlich* zu $\tilde{\gamma}_{ab}$ und $\tilde{A}_{ab}$ und unabhängig davon spezifiziert werden darf[45]. Der Fall $\operatorname{tr} K = 0$ ist daher lediglich als Spezialfall des allgemeineren Falles mit $\tau = konst$ anzusehen. In diesem Fall tritt dann z.B. in Gl. (27) noch ein zusätzlicher Term quadratisch in τ auf. Nimmt man auch noch den Term mit der Energiedichte ρ mit, lautet der Hamiltonian-Constraint

$$\tilde{R}\,\phi^{-4} - 8\phi^{-5}\,\tilde{\gamma}^{cd}\,\tilde{\nabla}_c\tilde{\nabla}_d\phi + \tfrac{2}{3}\tau^2 = \tilde{A}^{mn}\tilde{A}_{nm}\,\phi^{-12} + 4\,\rho\,. \tag{28}$$

Diese Gleichung ist als York-Lichnerowicz-Gleichung bekannt.

Es wäre nun wünschenswert, nachdem wir mit York und mittels des Hamiltonian-Constraints und der Momentum-Constraints den Tensor $\tilde{\gamma}_{ab}$ als den Träger der wahren dynamischen Freiheitsgrade des Gravitationsfeldes identifiziert haben und die Zwangsbedingungen in elliptische Differentialgleichungen umgeschrieben haben, auch aus den Bewegungsgleichungen Gl. (4) und Gl. (6) diejenigen Gleichungen auszusondern, die tatsächlich $\tilde{\gamma}_{ab}$ entwickeln und nicht die Metrik γ_{ab}. Schon York selber sagt in seiner ersten Arbeit[40] zu diesem Thema "The dynamical equations of gravity should be written in a form suitable to the present viewpoint". Dieses Problem, aus den Einstein-Gleichungen diejenigen Gleichungen zu destillieren, die die Konformstruktur propagieren, ist bis heute ungelöst[9]. Es existieren einige Ansätze in dieser Richtung, die aber alle nicht das gewünschte Ergebnis erbringen[4,17]. Zudem sind die dabei entstehenden Bewegungsgleichungen von impliziter Natur, d.h. man muß zuerst eine Differentialgleichung lösen und das Ergebnis in einen Hamiltonian einsetzen, der dann die gewünschten Bewegungsgleichungen liefert.

In dieser Diplomarbeit soll nun eine einfache und von der allgemeinen Relativitätstheorie *verschiedene* Modell-Theorie vorgeschlagen werden, die aufzeigt, wie eine explizite und sehr einfache Bewegungsgleichung für die unimodulare Metrik $\tilde{\gamma}_{ab}$ aussehen könnte, und was für Konsequenzen sich daraus ergeben. Diese Bewegungsgleichung werden wir im nächsten Kapitel auf heuristischem Weg finden, indem nach der einfachsten aller nur möglichen Gleichungen, die verschiedenen natürlichen Bedingungen genügt, gesucht wird. Die Eigenschaften dieser Gleichung unterscheiden sich zum Teil erheblich von dem, was man in der Einsteinschen Theorie erwarten würde. Insbesondere besitzt diese Differentialgleichung parabolische und nicht hyperbolische Form. Dies führt unter anderem dazu, daß sich Gravitationswellen schon im Vakuum dispersiv verhalten. Zu dieser Bewegungsgleichung für $\tilde{\gamma}_{ab}$ tritt die York-Lichnerowicz-Gleichung, die wir in diesem Kapitel als Gl. (28) angetroffen haben, und eine Differentialgleichung für die Lapsefunktion N. Auch diese in der Modell-Theorie notwendigen Differentialgleichungen werden wir nun einführen und motivieren.

4. Eine Bewegungsgleichung für $\tilde{\gamma}_{ab}$

In diesem Kapitel wird die in den vorherigen Abschnitten angekündigte Bewegungsgleichung für die unimodulare Metrik $\tilde{\gamma}_{ab}$ eingeführt. Dazu müssen wir uns zuerst mit einem wichtigen Tensor, dem Yorkschen Krümmungstensor, vertraut machen. Dieser mißt die konforme Krümmung eines dreidimensionalen Raumes. In vier oder mehr Dimensionen wird diese Funktion bekanntlich vom Weylschen Tensor $C_{\mu\nu\rho\sigma}$ übernommen, der die folgenden Eigenschaften besitzt[21]. Zum einen ist er konform invariant in dem Sinn, daß eine konforme Transformation der vierdimensionalen Metrik

$$g'_{\mu\nu} = \Phi^4 \, g_{\mu\nu} \tag{29}$$

keinen Einfluss auf die daraus berechneten Komponenten von $C_{\mu\nu\rho\sigma}$ besitzt, d.h. der Weyl-Tensor von $g'_{\mu\nu}$ ist identisch mit dem Weyl-Tensor von $g_{\mu\nu}$. Zum anderen verschwindet der Weyl-Tensor identisch, falls die zugrundeliegende Metrik konform flach ist. Ein von einer Metrik beschriebener Raum ist genau dann konform flach, falls man diese Metrik einer konformen Transformation derartig unterziehen kann, daß die dabei resultierende Metrik Riemann-flach ist. Jede Riemann-flache Metrik ist daher auch konform flach, eine konform flache Metrik muß aber nicht Riemann-flach sein. Will man jetzt die konforme Krümmung einer dreidimensionalen Metrik berechnen, so stellt man fest, daß der Weyl-Tensor in drei Dimensionen immer verschwindet, unabhängig davon, ob die zugrundeliegende Metrik konform flach ist oder nicht. Der Weyl-Tensor ist deshalb in drei Dimensionen nicht mehr als konformer Krümmungstensor zu verwenden. Stattdessen muß man entweder den sogenannten Bach-Tensor[26,47] oder dessen algebraisch äquivalente Formulierung als York-Tensor[40] verwenden. York hat diesen Tensor als erster angegeben. Eine mögliche Kennzeichnung ist die Definition als symmetrisierte Rotation des Ricci-Tensors[42]. Der York-Tensor Y^{ab} einer dreidimensionalen Metrik γ_{ab} lautet damit

$$Y^{ab} = \gamma^{1/3}\,\epsilon^{ef(a}\,\gamma^{b)m}\,\nabla_e R_{mf}\,, \tag{30}$$

wobei ϵ^{abc} das Levi-Civita Symbol bezeichnet, R_{ab} der Ricci-Tensor und γ die Determinante von γ_{ab} ist und die runden Klammern für Symmetrisierung stehen. Man erkennt, daß der York-Tensor im genauen Sinn gar kein Tensor sondern eine Tensordichte mit dem Gewicht $w = \frac{5}{3}$ ist. Man kann zeigen, daß dieser York-Tensor geeignet ist, die konforme Krümmung dreidimensionaler Metriken zu charakterisieren. Er besitzt in dieser Hinsicht die gleichen Eigenschaften wie der Weyl-Tensor, er ist wie dieser konform invariant und verschwindet, falls die Drei-Metrik konform flach ist. Zusätzlich hat Y^{ab} noch weitere interessante Eigenschaften. Man kann recht einfach nachweisen, daß er spurfrei ist:

$$\operatorname{tr} Y = 0\,. \tag{31}$$

Aus der Definition in Gl. (30) kann man sehen, daß Y^{ab} symmetrisch ist. Zusammen mit der Beziehung Gl. (31) erkennt man, daß der York-Tensor nach Abzug dreier beliebiger Funktionen, die die Koordinatenfreiheit repräsentieren, genau zwei koordinatenunabhängige Funktionen beeinhaltet. Die konforme Krümmung einer Drei-Geometrie wird folglich durch zwei Funktionen charakterisiert. Dies ist deshalb so interessant, weil wir erstens gesehen haben, daß man die Freiheitsgrade des Gravitationsfeldes gerade in dem konform invarianten Teil der dreidimensionalen Metrik γ_{ab} sehen kann und der York-Tensor gerade die Krümmung dieses Anteils beschreibt, und zweitens die Dynamik des Gravitationsfeldes eben auch durch genau zwei freie Funktionen beschrieben wird. Der York-Tensor zeichnet sich im Gegensatz zu den bekannten Tensoren, die in der Differentialgeometrie verwendet werden, außerdem dadurch aus, daß er drei räumliche Ableitungen besitzt. Durch diese dritte kovariante Ableitung wird der York-Tensor noch ein gutes Stück "nichtlinearer" als es z.B. der Ricci-Tensor schon ist. Diese

Tatsache macht sich z.B. bei tatsächlichen Berechnungen der Komponenten von Y^{ab} bemerkbar. Zusätzlich besitzt der York-Tensor noch die Eigenschaft der Transversalität, was aber im folgendem keine Bedeutung besitzt.

Wir begeben uns nun auf die Suche nach einer möglichen Bewegungsgleichung für eine unimodulare Metrik $\tilde{\gamma}_{ab}$, die wie im vorigen Kapitel erläutert, den konform invarianten Teil der räumlichen Metrik repräsentieren soll. Diese Suche kann natürlich nicht als formale Ableitung sondern lediglich als heuristischer Anhaltspunkt für eine Herleitung der Bewegungsgleichung angesehen werden, da die gesuchte Gleichung wie jede fundamentalere physikalische Gleichung nicht im mathematischen Sinn deduzierbar sein kann. Der hier eingeschlagene Weg ist zwar nicht der originale Weg, der ursprünglich vom Autor verfolgt worden ist, aber dafür derjenige, der am geradlinigsten zum gewünschten Ergebnis führt.

Für $\tilde{\gamma}_{ab}$ gilt—wie wir aus dem vorhergehenden Kapitel wissen—die Koordinatenbedingung

$$\det \tilde{\gamma}_{ab} = 1\,. \tag{32}$$

Jede in Frage kommende Gleichung, die die zeitliche Entwicklung von $\tilde{\gamma}_{ab}$ wiedergeben soll, muß diese Bedingung konservieren, d.h. Gl. (32) muß als Folge der noch zu findenden Bewegungsgleichung erhalten bleiben. In Anlehnung an die Arnowitt-Deser-Misner-Gleichungen fordern wir, daß die gesuchte Bewegungsgleichung von zweiter Ordnung in der Zeit sein soll. Jede Variation von $\tilde{\gamma}_{ab}$ muß wegen der Bedingung Gl. (32) spurfrei sein, wie man leicht zeigt. Dies gilt auch für die Zeitableitung von $\tilde{\gamma}_{ab}$. Es gilt nämlich allgemein[11]

$$\frac{d}{dt}\det\left(\tilde{\gamma}_{ab} + t\,\tilde{\sigma}_{ab}\right)\Big|_{t=0} = \operatorname{tr}\tilde{\sigma}\det\tilde{\gamma}_{ab}\,. \tag{33}$$

Da $\det\tilde{\gamma}_{ab} = 1$, und da sich die Determinante von $\tilde{\gamma}_{ab}$ zeitlich nicht ändern soll, muß die zeitliche Änderung von $\tilde{\gamma}_{ab}$, die mit $\tilde{\sigma}_{ab}$ bezeichnet wird, spurfrei sein. Die Tilde über dem Sigma soll andeuten, daß $\tilde{\sigma}_{ab}$ mit der unimodularen Metrik

$\tilde{\gamma}_{ab}$, die ja ebenfalls durch eine Tilde gekennzeichnet wird, zusammenhängt und dadurch eben

$$\operatorname{tr}\tilde{\sigma} = 0 \tag{34}$$

gilt. Wir können damit schon einmal die erste Hälfte der Bewegungsgleichung angeben:

$$\partial_t \tilde{\gamma}_{ab} = \tilde{\sigma}_{ab} \,. \tag{35}$$

Wir wissen dabei natürlich noch nicht, was $\tilde{\sigma}_{ab}$ eigentlich ist. Die zeitliche Entwicklung von $\tilde{\sigma}_{ab}$ muß jedoch garantieren, daß die Bedingung Gl. (34) erhalten bleibt. Das ist jedoch schon dadurch gesichert, daß man die zeitliche Ableitung von $\tilde{\sigma}_{ab}$ als spurfrei annimmt. Diese dann zweite zeitliche Ableitung von $\tilde{\gamma}_{ab}$ ist folglich genau wie $\tilde{\gamma}_{ab}$ selbst symmetrisch in den beiden Indizes und zusätzlich spurfrei. Wir suchen nun eine *rein geometrische Größe*, die spurfrei, symmetrisch und zudem in direktem Zusammenhang mit der Konformstruktur steht, die den dynamischen Teil des Gravitationsfeldes beschreibt. Glücklicherweise wissen wir aus der Arbeit von York, daß es einen Tensor mit diesen Eigenschaften gibt—den am Anfang dieses Kapitels beschriebenen York-Tensor. Dieser Krümmungstensor lautet für die unimodulare Metrik $\tilde{\gamma}_{ab}$ wie folgt:

$$\tilde{Y}^{ab} = \epsilon^{ef(a}\,\gamma^{b)m}\,\nabla_e R_{mf} \,. \tag{36}$$

Damit ist es möglich, eine sinnvolle und trotzdem sehr einfache Bewegungsgleichung für die Metrik $\tilde{\gamma}_{ab}$ vorzuschlagen, nämlich $\partial_t\partial_t\tilde{\gamma}_{ab} = \tilde{Y}_{ab}$. Die Indizes des York-Tensors werden dabei mit $\tilde{\gamma}_{ab}$ gesenkt.

Zuerst wollen wir aber noch den Zeitableitungsoperator geometrisch erweitern[11]. Wenn man sich die ADM-Gleichungen Gl. (4) und Gl. (6) genau ansieht, so bemerkt man, daß die Zeitableitung immer gleichzeitig mit einer Lie-Ableitung entlang eines räumlichen Vektors M^a auftritt. Die Lie-Ableitung hat bekanntlich eine einfache geometrische Bedeutung: sie nimmt aktive Koordinatentransformationen während der zeitlichen Evolution der Metrik vor. Die Koordinatentransformationen werden durch den frei wählbaren Shift-Vektor M^a generiert. Diese Freiheit sollte in jeder kovarianten Bewegungsgleichung gegeben sein. In dem hier gegebenen Fall muß man zusätzlich dafür sorgen, daß bei einer Koordinatentransformation die Bedingung

$$\det \tilde{\gamma}_{ab} = 1 \tag{37}$$

erhalten bleibt. Dies kann man dauernd dadurch gewährleisten, daß man statt einer allgemeinen Lie-Ableitung eine spurfreie Lie-Ableitung verwendet, die mit $\pounds'$ bezeichnet wird. Dieser Operator wirkt definitionsgemäß zunächst wie die gewöhnliche Lie-Ableitung, anschließend aber wird das Ergebnis der Operation spurfrei gemacht. Wir definieren nun eine erweiteren Zeitableitungsoperator D mittels

$$D := \partial_t + \pounds'_M \, . \tag{38}$$

Damit lautet die Bewegungsgleichung für die unimodulare Metrik $\tilde{\gamma}_{ab}$ in der endgültigen Form

$$DD\tilde{\gamma}_{ab} = \tilde{Y}_{ab} \, . \tag{39}$$

Diese Aussage ist die zentrale Gleichung, die im Mittelpunkt dieser Arbeit steht. Sie ist bisher in der Literatur vollkommen unbekannt und weder erwähnt noch untersucht worden.

Gl. (39) soll in unserer Modell-Theorie die Freiheitsgrade des Gravitationsfeldes propagieren. Wie man sofort sieht, entwickelt sie—genau wie es in der Einsteinschen Theorie der Fall ist—zwei dynamische Freiheitsgrade. Die Art der Dynamik unterscheidet sich aber von derjenigen, die man von der allgemeinen Relativitätstheorie erwarten würde, weil Gl. (39) zwei zeitliche und drei räumliche Ableitungen beeinhaltet. Da in dieser Bewegungsgleichung ausschließlich Größen vorkommen, die als "unconstrained" betrachtet werden, treten keine Zwangsbedingungen wie etwa bei den ADM-Gleichungen auf. Da die Bewegungsgleichung eine unimodulare Metrik als dynamisches Objekt betrifft, wird naturgemäß die allgemeine Kovarianz dieser Gleichung gebrochen, weil ja immer $\det \tilde{\gamma}_{ab} = 1$ gelten muß. Dies ist jedoch keine große Einschränkung, da noch ausreichend Eichfreiheit zur Verfügung steht[34].

Um die Modell-Theorie zu vervollständigen, d.h. um ein Verfahren anzugeben, wie man auf eine vierdimensionale Raum-Zeit zurückkommen kann, damit die Theorie mit der physikalischen Realität verglichen werden kann, nehmen wir einige Anleihen aus der Einsteinschen Gravitationstheorie. Zunächst stellt sich die Frage, wie man aus der unimodularen Metrik $\tilde{\gamma}_{ab}$ eine komplettierte Metrik γ_{ab} errechnen kann. Dazu wird eine Funktion ϕ benötigt, die den gewünschten Zusammenhang mittels

$$\gamma_{ab} = \phi^4 \, \tilde{\gamma}_{ab} \tag{40}$$

herstellt. Diese Funktion wird wie in der allgemeinen Relativitätstheorie so gewählt, daß der ADM-Hamiltonian-Constraint erfüllt ist. Das bedeutet, daß ϕ aus der York-Lichnerowicz-Gleichung gewonnen werden soll. Für diese Differentialgleichung existieren weitreichende Existenz- und Eindeutigkeitsbeweise, so daß die Lösbarkeit nach ϕ gesichert ist[4,22,24]. Der Skalenfaktor soll daher in dieser Modelltheorie aus der Differential-Gleichung

$$\tilde{R}\,\phi^{-4} - 8\phi^{-5}\,\tilde{\gamma}^{cd}\,\tilde{\nabla}_c\tilde{\nabla}_d\phi + \tfrac{2}{3}\tau^2 = 4\,\rho \tag{41}$$

gewonnen werden. $\tilde{R}$ ist dabei der Krümmungsskalar von $\tilde{\gamma}_{ab}$, $\tilde{\nabla}$ die mit $\tilde{\gamma}_{ab}$ kompatible kovariante Ableitung und τ eine Konstante mit $\tilde{\nabla}_a\tau = \partial_a\tau = 0$. Im Gegensatz zu Gl. (28) verschwindet in Gl. (41) der Tensor A_{ab} , weil in dieser Modell-Theorie der Skalenfaktor ϕ nicht durch die "Geschwindigkeit" von

$\tilde{\gamma}_{ab}$—die ja von dem A_{ab} aus der allgemeinen Relativitätstheorie grundverschieden ist—beinflusst werden soll; lediglich die unimodulare Metrik $\tilde{\gamma}_{ab}$ selbst und natürlich die Energiedichte ρ und die Konstante τ sollen auf ϕ einwirken können. Mit den Gleichungen Gl. (40) und Gl. (41) haben wir jetzt eine Vorschrift, wie wir die vollständige Metrik γ_{ab} erhalten.

Im nächsten Schritt müssen wir uns darlegen, wie man die vierdimensionale Raum-Zeit inklusive der hyperbolischen Signatur zurückbekommt. Wir verwenden dazu eine Gleichung, die, wie auch im letzten Kapitel erklärt, sich insbesondere in der numerischen Relativität großer Beliebtheit erfreut. Mit der Annahme $\tau = konst$ haben wir vom vierdimensionalen Standpunkt aus eine spezielle Blätterung der Raum-Zeit in raumartige Hyperflächen vorgenommen, auf denen unsere Gleichungen gültig sind. Da aber die Foliation der Raum-Zeit durch die Lapse-Funktion N bestimmt wird, benötigen wir eine Differential-Gleichung , um genau das N zu finden, für das $\tau = konst$ gilt. Im Vakuum und für den Fall $\tau = 0$ erfüllt diesen Zweck die sogenannte Maximalschnitt-Bedingung. Sie lautet[29]

$$\gamma^{ab}\,\nabla_a\nabla_b N = NR\,. \tag{42}$$

Es sei ausdrücklich angemerkt, daß sich diesmal alle Größen auf die komplettierte Metrik γ_{ab} und *nicht* auf die unimodulare Metrik $\tilde{\gamma}_{ab}$ beziehen. Durch unsere Schreibweise ist das am Fehlen der Tilde auf den jeweiligen Größen leicht zu erkennen. Diese Differentialgleichung verschafft uns das gesuchte N.

Lassen wir zudem von der Bedingung $\tau = 0$ ab und betrachten wir auch den Fall des materiegefüllten Raumes mit einer Energiedichte ρ und einem Spannungstensor S_{ab}, so wird Gl. (42) zur Gleichung

$$\gamma^{ab}\,\nabla_a\nabla_b N = NR - \partial_t\tau + N\tau^2 + N\,(\mathrm{tr}\,S - 3\rho) \tag{43}$$

erweitert[45]. Gl. (42) ist offensichtlich ein Spezialfall von Gl. (43). Mit der aus Gl. (42) oder Gl. (43) erhaltenen Lapse-Funktion N läßt sich schließlich eine vierdimensionale Metrik $g_{\mu\nu}$ mit hyperbolischer Signatur nach dem gleichen Verfahren wie in der ADM-Theorie errechnen. Da die bis jetzt angegebenen Gleichungen auf einer speziellen Blätterung der Raum-Zeit—eben den Hyperflächen mit konstantem τ—definiert sind, kann man allerdings nicht *folgern*—wie in der allgemeinen Relativitätstheorie—sondern man muß *postulieren*, daß $g_{\mu\nu}$ ein Tensor ist. Im *nachhinein*, d.h. wenn $g_{\mu\nu}$ bekannt ist, ist es dann natürlich erlaubt, eine andere Blätterung dieser Raum-Zeit als diejenige mit $\tau = konst$ zu betrachten. Das vierdimensionale Linienelement konstruieren wir wie in der ADM-Theorie mit

$$ {}^{(4)}ds^2 = \phi^4 \, \tilde{\gamma}_{ab} \, (dx^a + M^a dt)(dx^b + M^b dt) - N^2 dt^2 \, . \tag{44} $$

Die Gleichungen Gl. (39)–(44) bilden den mathematischen Unterbau unserer Modell-Dynamik der Raum-Zeit. Es ist interessant zu sehen, daß in Analogie zur Elektrodynamik in Strahleneichung eine *freie* Bewegungsgleichung auftritt, die die wahren Freiheitsgrade propagiert. In der Elektrodynamik haben wir ja bekanntlich als freie Bewegungsgleichung eine dreidimensional kovariante Wellengleichung und als ergänzende Gleichung das Gaußsche Gesetz. Hier haben wir eine freie Bewegungsgleichung für $\tilde{\gamma}_{ab}$ und als ergänzende Gleichungen die York-Lichnerowicz-Gleichung und eine Blätterungsbedingung. Zu den Gleichungen Gl. (39)–(44) tritt nun noch das Einsteinsche Postulat, daß sich Testteilchen auf den Geodäten der durch das Linienelement Gl. (44) definierten Raum-Zeit bewegen sollen.

Damit ist die Theorie komplett vorgestellt, und wir können nun daran gehen, einfache Lösungen der Gleichungen zu suchen und in geeigneter Weise zu interpretieren. Im nächsten Kapitel werden wir den Zusammenhang mit der Einsteinschen Gravitationstheorie aufzeigen. Dabei werden wir sehen, daß die Schwarzschild-Metrik und auch die Friedmann-Metrik von den Gleichungen Gl. (39)–(44) vorhergesagt werden, so daß wichtige Lösungen der allgemeinen Relativitätstheorie aufbewahrt werden. Die Randbedingungen, die man dabei für die elliptischen Gleichungen Gl. (41) und Gl. (43) stellen muß, werden ebenfalls im nächsten Kapitel erläutert.

5. Schwarzschild- und Friedmann-Lösungen

Jede neue Theorie muß sich in das Theoriengebäude der Physik derartig einfügen, daß es möglich ist, Zusammenhänge zwischen dieser Theorie und vorhergehenden Theorien herzustellen. Dabei sollten die erfolgreichen Vorhersagen der älteren Theorien von den neueren Theorien konserviert werden. In unserem Fall bedeutet das, daß die im letzten Kapitel entwickelte Modell-Theorie zumindest zwei Elemente aus der allgemeinen Relativitätstheorie enthalten muß. Zum einen ist dies die Schwarzschild-Metrik, die auf eine Vielzahl von Wegen heute experimentell bestätigt ist. Zum anderen möchte man die Friedmann-Metrik, die den Ausgangspunkt des kosmologischen Standardmodells bildet und die den experimentell beobachteten Hubble-Effekt auf sehr einfache Weise erklärt, in der Menge der Lösungen wiederfinden. In diesem Kapitel werden wir zeigen, daß diese beiden Metriken in der Tat Lösungen der vorgelegten Modell-Theorie sind. Die allgemeinen Wellenlösungen, die man in der Einsteinschen Theorie angeben kann, tauchen jedoch in dieser Theorie zumindest in der originalen Form *nicht* auf. Da es aber zum gegenwärtigen Zeitpunkt (1994) keinen direkten Nachweis von Gravitationswellen vom Einsteinschen Typ gibt[38], muß das nicht unbedingt zum Schaden der Theorie sein.

Zunächst nehmen wir an, daß die unimodulare Metrik $\tilde{\gamma}_{ab}$ kugelsymmetrisch sein soll. Dies ist eine natürliche Annahme sowohl für den Schwarzschildschen als auch den Friedmannschen Fall. In kartesischen Koordinaten kann das allgemeinste kugelsymmetrische Linienelement eines dreidimensionalen Raumes in der Form

$$ds^2 = \Psi\left(r^2\right)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) \tag{45}$$

geschrieben werden. $\Psi(r^2)$ ist dabei ausschließlich eine Funktion des Abstandquadrates $r^2 = x^2+y^2+z^2$. Da $\tilde{\gamma}_{ab}$ der Reskalierungsbedingung Gl. (32) genügen muß, sehen wir sofort, daß $\Psi = 1$ sein muß. Die unimodulare Metrik $\tilde{\gamma}_{ab}$ ist also allein durch die Forderung nach Kugelsymmetrie schon eindeutig bestimmt. Die Bewegungsgleichung Gl. (39) soll uns nun die zeitliche Entwicklung von $\tilde{\gamma}_{ab}$ liefern. Der York-Tensor einer kugelsymmetrischen Metrik verschwindet, da das Linienelement Gl. (45) konform flach ist. Die Bewegungsgleichung für die Metrik $\tilde{\gamma}_{ab}$ wird damit zu

$$\partial_t \partial_t \tilde{\gamma}_{ab} = 0\,, \tag{46}$$

wenn man auf Koordinatentransformationen verzichtet und deshalb die Shift-Funktionen M^a verschwinden läßt. Wie man leicht sieht, erfüllt die kugelsymmetrische unimodulare Metrik mit $\Psi = 1$ diese Gleichung. Dadurch erkennt man, daß das Gravitationsfeld im Falle der Kugelsymmetrie gar keine echte Dynamik besitzt, da die unimodulare Metrik $\tilde{\gamma}_{ab}$ zeitlich konstant ist. Mit Hilfe der York-Lichnerowicz-Gleichung versuchen wir nun, den Skalenfaktor ϕ zu bekommen, der $\tilde{\gamma}_{ab}$ zur kompletten Metrik γ_{ab} ausbaut. Im Falle der Schwarzschild-Metrik wird dieser Faktor ϕ, der verantwortlich für die von γ_{ab} gemessenen Längen ist, ortsabhängig, im Falle der Friedmannschen Metrik zeitabhängig. Aus diesem Grund unterscheidet sich die weitere Behandlung der beiden Fälle. Zuerst wenden wir uns der Schwarzschild-Lösung zu.

Die Schwarzschild-Lösung ist eine Vakuum-Lösung. Deshalb setzen wir in der York-Lichnerowicz-Gleichung Gl. (41) die Energiedichte $\rho = 0$. Die frei wählbare Konstante τ lassen wir ebenfalls verschwinden. Mit der obigen kugelsymmetrischen unimodularen Metrik nimmt die Differentialgleichung für ϕ dann die folgende Gestalt an:

$$\triangle \phi = 0\,. \tag{47}$$

$\triangle$ ist dabei der gewöhnliche Laplace-Operator $\triangle := \partial_x\partial_x + \partial_y\partial_y + \partial_z\partial_z$. Die Lösung dieser Gleichung ist bekannt und lautet in Kugelkoordinaten mit der

Randbedingung $\phi = 1$ für $r \to \infty$

$$\phi = 1 + \frac{c_1}{r}\,. \tag{48}$$

Die obige Randbedingung stellt sicher, daß die Metrik $\tilde{\gamma}_{ab}$ asymptotisch in die flache Standard-Metrik übergeht. Die Konstante c_1 hat den Wert $m/2$, wie man später durch Vergleich feststellt. Dabei ist m die Masse des im Ursprung des Koordinatensystems ruhenden Punktteilchens. Die Metrik γ_{ab} lautet damit

$$\gamma_{ab} = \left(1 + \frac{c_1}{r}\right)^4 \tilde{\gamma}_{ab}\,. \tag{49}$$

Die Lapse-Funktion N berechnen wir aus der Blätterungsbedingung in Gl. (42), weil $\rho = 0$ und weil $\tau = 0$ ist. Eine kurze Kalkulation in Komponenten ergibt

$$\frac{d^2N}{dr^2} + \frac{2}{c_1 + r}\frac{dN}{dr} = 0\,. \tag{50}$$

Die allgemeine Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichung für $N(r)$ mit der Randbedingung $N = 1$ für $r \to \infty$ lautet

$$N = \frac{r - c_2}{r + c_1}\,. \tag{51}$$

Die Konstante c_2 muß wie c_1 durch Vergleich mit dem Experiment ermittelt werden. Dazu rekonstruieren wir zunächst die vierdimensionale Raum-Zeit-Metrik. Mit Hilfe der Vorschrift Gl. (44) gelangen wir zum Linienelement

$$^{(4)}ds^2 = \left(1 + \frac{c_1}{r}\right)^4 \left(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta\, d\varphi^2\right) - \left(\frac{r - c_2}{r + c_1}\right)^2 dt^2\,. \tag{52}$$

Analysiert man diese Metrik im sogenannten parameterisierten Post-Newtonschen Formalismus[21,38], so stellt man fest, daß c_1 und c_2 aufgrund *observationeller* Befunde die Werte $c_1 = c_2 = m/2$ annehmen müssen. Damit wird unser Linienelement zu

$$^{(4)}ds^2 = \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 \left(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta\, d\varphi^2\right) - \left(\frac{1 - m/2r}{1 + m/2r}\right)^2 dt^2\,. \tag{53}$$

Es stellt die Schwarzschild-Geometrie in isotropen Koordinaten dar. Diese ist damit eine exakte Lösung der hier vorgelegten Modell-Theorie.

Nun wollen wir zeigen, daß dies auch für die kosmologische Friedmann-Metrik gilt. Wieder nehmen wir Kugelsymmetrie an, so daß die unimodulare Metrik $\tilde{\gamma}_{ab}$ auch diesmal zeitlich konstant ist. Zusätzlich soll das kosmologische Prinzip zur Anwendung kommen. Das bedeutet, daß wir schon jetzt die Form des Skalenfaktors ϕ anschreiben können, da das genannte Prinzip zur Folge hat, daß die dreidimensionalen Hyperflächen Räume konstanter Krümmung sind. Für ϕ gilt deshalb[26]

$$\phi^4 := \frac{a_t^2}{(1+kr^2/4)^2} \quad . \tag{54}$$

Der tiefgesetzte Index t an der Funktion a_t soll andeuten, daß sie von der Koordinatenzeit t abhängt. Diese a_t ist eine Art von Weltradius und $k \in \{1, 0, -1\}$ eine Konstante, die wie üblich angibt, ob das Universum geschlossen oder offen ist. Setzt man das ϕ aus Gl. (54) in die York-Lichnerowicz-Gleichung Gl. (41) ein, erhält man die Gleichung

$$\frac{6k}{a_t^2} + \frac{2\tau^2}{3} = 4\,\rho\,. \tag{55}$$

Die räumlich konstante äußere Krümmung τ darf im Anfangswertproblem frei vorgegeben werden. Dann kann mit einer Blätterungsbedingung die Lapse-Funktion N errechnet werden. Wir möchten jedoch diesmal die Lapse-Funktion, die ja im wesentlichen die g_{00}-Komponente der Vier-Metrik ist, vorschreiben. Wegen des kosmologischen Prinzips muß nämlich $g_{00} = -1$ sein[26] und daher $N = 1$. Aus der Blätterungsbedingung Gl. (43) errechnen wir dann nicht mehr N sondern τ. Für $N = 1$ schreibt sich diese Gleichung

$$0 = \frac{6k}{a_t^2} - \partial_t\tau + \tau^2 + (\mathrm{tr}\,S - 3\rho)\ . \tag{56}$$

Bei einfachen kosmologischen Modellen verwendet man zur Beschreibung der Materie den Energie-Impuls-Tensor einer idealen Flüssigkeit. Dort gilt

$$\operatorname{tr} S = 3p\,. \tag{57}$$

Aus der Thermodynamik kann man nun einen allgemeinen Zusammenhang zwischen der Energiedichte ρ und dem Druck p ableiten. Ausgedrückt mit dem Weltradius a_t lautet dieser Zusammenhang[21]

$$\partial_t \left(\rho\, a_t^3\right) = -p\,\partial_t a_t^3\,. \tag{58}$$

Damit kann in Gl. (56) der Druck p eliminiert werden, und Gl. (56) wird zu

$$6\,\rho = \frac{6k}{a_t^2} + \tau^2 - \frac{a_t\,\partial_t \rho}{\partial_t a_t} - \partial_t \tau\,. \tag{59}$$

Aus der Gl. (55) bekommen wir die Dichte ρ und deren zeitliche Ableitung, ausgedrückt in τ. Setzen wir diese beiden Ausdrücke in die letzte Gleichung ein, so erhalten wir nach einigen Umformungen folgende Differentialgleichung:

$$\partial_t \tau = \tau \left(\frac{-a_t}{3\partial_t a_t}\right) \partial_t \tau\,. \tag{60}$$

Eine Lösung erkennt man sofort:

$$\tau = -\frac{3\partial_t a_t}{a_t} \quad . \tag{61}$$

Damit wird aus der York-Lichnerowicz-Gleichung Gl. (55) die aus der Einsteinschen Theorie bekannte Friedmann-Gleichung[26]

$$\frac{3k}{a_t^2} + \frac{3\left(\partial a_t\right)^2}{a_t^2} = 2\,\rho\,. \tag{62}$$

Sie bestimmt die Entwicklung des Weltradius a_t und damit die Expansion oder Kontraktion des Universums.

So haben wir in diesem Kapitel gesehen, daß die beiden wichtigsten Lösungen der Einsteinschen Theorie auch exakte Lösungen unserer Modell-Theorie sind.

Der Grenzfall zur Newtonschen Gravitationstheorie, der für das Verständnis von Vielkörperproblemen deswegen wichtig ist, weil die Schwarzschildlösung nur das Gravitationsfeld eines einzigen Körpers beschreibt, soll im folgenden kurzen Kapitel erläutert werden.

6. Der Newtonsche Grenzfall

Die Bewegung eines Testteilchens, das sich auf einer Geodäten einer vierdimensionalen Raumzeit bewegt, wird im Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten und schwacher statischer Gravitationsfelder vollständig von der Zeit-Zeit-Komponente der vierdimensionalen Metrik kontrolliert. Um eine Korrespondenz mit der Newtonschen Gravitationstheorie zu erhalten, muß

$$g_{00} = -1 - 2\Phi_N \tag{63}$$

gelten[21]. Dabei ist Φ_N das Newtonsche Gravitationspotential, das durch die Poissongleichung

$$\triangle\Phi_N = \rho \tag{64}$$

bestimmt wird. Wir zeigen jetzt, daß diese Potentialgleichung in den Gleichungen unserer Modell-Theorie enthalten ist.

Im Newtonschen Grenzfall muß $g_{00} = -1 - 2\Phi_N$ werden. Das ist gleichbedeutend damit, daß die Lapse-Funktion N bei verschwindendem Shift-Vektor durch

$$N = 1 + \Phi_N \tag{65}$$

gegeben sein muß. Die Blätterungsbedingung aus Gl. (43) wird mit $\tau = 0$ und $S_{ab} = 0$ zu

$$\gamma^{ab}\,\nabla_a\nabla_b N = N\;(R - 3\,\rho)\;. \tag{66}$$

Aus der York-Lichnerowicz-Gleichung wissen wir, daß $R = \rho$ gilt, so daß Gl. (66) sich zu

$$\gamma^{ab}\,\nabla_a\nabla_b N = N\,\rho \tag{67}$$

vereinfacht. Im Newtonschen Grenzfall treten keine dynamischen Aktivitäten des Gravitationsfeldes, also keine Gravitationswellen auf. Die unimodulare Metrik

$\tilde{\gamma}_{ab}$ ist daher in kartesischen Koordinaten einfach die Einheitsmatrix. Bei kleinen Massendichten kann man davon ausgehen, daß sich der Skalenfaktor ϕ nur wenig von eins unterscheidet. Die Blätterungsbedingung aus Gl. (67) vereinfacht sich dann weiter mit Gl. (65) zu

$$\triangle\Phi_N = (1 + \Phi_N)\ \rho\,. \tag{68}$$

Für kleine Φ_N reduziert sich diese Gleichung schließlich wieder auf die altbekannte Poisson-Gleichung

$$\triangle\Phi_N = \rho\,. \tag{69}$$

Damit ist gezeigt, daß die Vorhersagen unserer Modell-Theorie für kleine Massendichten und kleine Geschwindigkeiten mit der Newtonschen Gravitationstheorie übereinstimmen.

Im nächsten Kapitel werden wir die Bewegungsgleichung aus Gl. (39) linearisieren und damit versuchen, Näherungslösungen für diese Gleichung zu finden.

7. Lineare Näherung der Bewegungsgleichung

Die Bewegungsgleichung Gl. (39) gibt Auskunft über das zeitliche Verhalten der unimodularen Metrik $\tilde{\gamma}_{ab}$. Diese Gleichung ist freilich wegen der in ihr enthaltenen nichtlinearen Terme schwer exakt zu lösen. Aus diesem Grunde ist es sinnvoll, zu linearisieren. Die Metrik $\tilde{\gamma}_{ab}$ wird dazu durch die Summe der Einheitsmatrix η_{ab} und einer linearen Störung h_{ab} approximiert:

$$\tilde{\gamma}_{ab}^{\text{appr.}} = \eta_{ab} + h_{ab}\,. \tag{70}$$

Die Störung h_{ab} soll dabei im Vergleich zu η_{ab} klein sein, d.h. $|h_{ab}| \ll 1$. Zusätzlich muß die Spur von h_{ab} verschwinden, weil nur dann die Metrik $\tilde{\gamma}_{ab}^{\text{appr.}}$ in erster Ordnung von h_{ab} unimodular ist, d.h. es gilt genau mit $\operatorname{tr} h = 0$

$$\det \tilde{\gamma}_{ab}^{\text{appr.}} = 1\,. \tag{71}$$

Wäre $\operatorname{tr} h \neq 0$, würde die Derminante schon in erster Ordnung von h_{ab} von eins abweichen und damit die Linearisierung von Gl. (39) ungültig werden lassen. Die Spur von h_{ab} ist gleich $\operatorname{tr} h = \eta^{ab} h_{ab}$. In unserer linearen Näherung werden dort wie auch in allen anderen Gleichungen die Indizes mit η_{ab} gehoben und gesenkt und *nicht* notwendigerweise mit $\tilde{\gamma}_{ab}^{\text{appr.}}$, da der dabei entstehende Fehler nur von zweiter Ordnung in h_{ab} ist. Mit diesen Vorbemerkungen können wir daran gehen, wichtige Krümmungsgrößen in linearer Näherung zu berechnen. Die Linearisierung des Ricci-Tensors ist Standard[21]. Für die Metrik $\tilde{\gamma}_{ab}^{\text{appr.}}$ lautet er

$$\tilde{R}_{ab}^{\text{appr.}} = \frac{1}{2}\left(\partial_b \partial^m h_{am} + \partial_a \partial^m h_{mb} - \triangle h_{ab}\right)\,. \tag{72}$$

Der Laplace-Operator ist dabei definiert als $\triangle = \partial^m \partial_m$. Im York-Tensor tritt die kovariante Ableitung des Ricci-Tensors auf. Ausgedrückt mit der gewöhnlichen partiellen Ableitung lautet sie

$$\nabla_e R_{mf} = \partial_e R_{mf} - R_{md}\,\Gamma^d{}_{fe} - R_{fd}\,\Gamma^d{}_{me}\,. \tag{73}$$

In der linearen Näherung unter Verwendung von Gl. (72) wird daraus

$$\left(\nabla_e R_{mf}\right)^{\mathrm{appr.}} = \frac{1}{2}\left(\partial_e \partial_f \partial^n h_{mn} + \partial_e \partial_m \partial^n h_{nf} - \triangle \partial_e h_{fm}\right) . \tag{74}$$

Der York-Tensor von $\tilde{\gamma}_{ab}^{\mathrm{appr.}}$ ist definiert durch Gl. (36). Mit Gl. (74) bekommen wir

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_{ab}^{\mathrm{appr.}} = &-\frac{1}{4}\left({\epsilon_a}^{cf} \partial_c \triangle h_{fb} + {\epsilon_b}^{cf} \partial_c \triangle h_{af}\right) \\ &+ \frac{1}{4}\left({\epsilon_a}^{cf} \partial_b \partial_c \partial^g h_{fg} + {\epsilon_b}^{cf} \partial_a \partial_c \partial^g h_{fg}\right) . \end{aligned} \tag{75}$$

Die Bewegungsgleichung für die unimodulare Metrik lautet dann in linearisierter Form

$$DD\left(\eta_{ab} + h_{ab}\right) = \tilde{Y}_{ab}^{\mathrm{appr.}} \tag{76}$$

beziehungsweise bei verschwindendem Shiftvektor M^a

$$\partial_t \partial_t h_{ab} = \tilde{Y}_{ab}^{\mathrm{appr.}} . \tag{77}$$

Diese Gleichung stellt dar, wie sich in der Modell-Theorie eine kleine lineare Anregung h_{ab} zeitlich entwickelt. Auf den ersten Blick wird man vermuten, daß sich diese Störung wellenartig ausbreitet. Wegen der unterschiedlichen Tiefe der zeitlichen und räumlichen Ableitungen auf den beiden Seiten hat diese Bewegungsgleichung jedoch *nicht* die mathematische Form und die Charakteristiken einer gewöhnlichen Wellengleichung. Auf dieses Problem werden wir im nächsten Kapitel näher eingehen. Für jede Lösung h_{ab} von Gl. (76) fordern wir, daß die Störung h_{ab} *überall* die Kleinheitsbedingung $|h_{ab}| \ll 1$ erfüllt, insbesondere also daß die Störung h_{ab} für *keine* Koordinatenwerte etwa von x, y, z, t singulär wird. Das gilt global, und so werden durch diese Forderung etwa Lösungen der linearisierten Bewegungsgleichung Gl. (76), die nur in einem beschränkten Bereich die Kleinheitsbedingung erfüllen und die außerhalb dieses Gebietes ein quadratisch ansteigendes h_{ab} besitzen, ausdrücklich ausgeschlossen.

Wir wollen nun versuchen, mit einem aus der allgemeinen Relativitätstheorie vertrauten Ansatz eine Lösung von Gl. (77) zu finden. Dazu verwenden wir eine Metrik, die man in der linearisierten Einsteinschen Gravitationstheorie als Ansatz für eine ebene transversal polarisierte Gravitationswelle verwendet[21,38]. Dementsprechend nehmen wir für die Störung h_{ab} die folgende Form an:

$$h_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & -\alpha \end{pmatrix} . \tag{78}$$

Dabei sind α und β Funktionen von $u = t - x$. Wie man sieht ist wie erforderlich $\operatorname{tr} h = 0$. Mit diesem Ansatz wird eine ebene Quadrupolwelle wiedergegeben, die sich mit Lichtgeschwindigkeit in x-Richtung fortbewegt. Der linearisierte York-Tensor $\tilde{Y}_{ab}^{\text{appr.}}$ davon ist schnell berechnet. In Matrix-Form lautet er

$$\tilde{Y}_{ab}^{\text{appr.}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\beta''' & \frac{1}{2}\alpha''' \\ 0 & \frac{1}{2}\alpha''' & \frac{1}{2}\beta''' \end{pmatrix} . \tag{79}$$

Die Striche bezeichnen dabei die Ableitungen nach u. Unter der Verwendung des Ansatzes aus Gl. (78) mit dem daraus resultierendem York-Tensor aus Gl. (79) verwandelt sich die linearisierte Bewegungs-Gl. (77) in ein System von zwei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen für α und β:

$$\alpha'' = -\tfrac{1}{2}\beta''' \,, \tag{80a}$$

$$\beta'' = \tfrac{1}{2}\alpha''' \,. \tag{80b}$$

Die allgemeine Lösung dieses Differentialgleichungssystems kann recht einfach angegeben werden. Sie enthält insgesamt sechs frei wählbare Konstanten und lautet wie folgt:

$$\alpha = c_1 + u\, c_2 + A_1 \sin 2u + A_2 \cos 2u \,, \tag{81a}$$

$$\beta = c_3 + u\, c_4 + A_1 \cos 2u - A_2 \sin 2u \,. \tag{81b}$$

Wegen der Linearität der Bewegungs-Gleichung darf man diese Lösung in zwei getrennten Teilen analysieren. Der Teil der Lösung Gl. (81), der von den beiden Konstanten A_1 und A_2 abhängt, stellt offensichtlich eine harmonische Welle dar, deren Amplitude durch A_1 und A_2 bestimmt wird. Da der Störtensor h_{ab} die Bedingung $|h_{ab}| \ll 1$ zu erfüllen hat, müssen die Konstanten A_1 und A_2 betragsmäßig klein im Vergleich zu eins sein. Es ist interessant zu sehen, daß diese ebene harmonische Welle, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet, eine durch die Bewegungsgleichung festgelegte feste Frequenz besitzt. Eine allgemeine Wellenlösung für beliebige Frequenzen mit fester Ausbreitungsgeschwindigkeit c wie in der allgemeinen Relativitätstheorie tritt nicht auf. Wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, gibt es in der Modell-Theorie aber auch Wellen beliebiger Frequenzen, nur besitzen diese jeweils unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeiten.

Der andere Teil der Lösung gemäß Gl. (81), der von den vier Konstanten c_i abhängt, ist eine reine Koordinatenänderung, die die der Metrik zugrundeliegende Geometrie nicht verändert. Dies kann man dadurch einsehen, daß man den Riemann-Tensor der Drei-Metrik $\tilde{\gamma}_{ab}^{\text{appr.}}$ betrachtet, wie sie von Gl. (70) mit Gl. (78) und Gl. (81) definiert wird. Setzt man dort die Wellenamplituden A_1 und A_2 gleich null, so stellt man fest, daß der linearisierte Riemann-Tensor verschwindet. Das bedeutet, daß die Metrik η_{ab} und die Metrik $\eta_{ab} + h_{ab}$ bei verschwindenden A_i in erster Ordnung von h_{ab} die gleiche flache Geometrie beschreiben und daher lediglich die Koordinaten geändert worden sind. Sind dagegen A_1 und A_2 ungleich null, so verschwindet der Riemann-Tensor nicht, d.h. die der Metrik $\eta_{ab} + h_{ab}$ zugrundeliegende Geometrie ist sehr wohl dynamisch verändert worden. Fordert man, wie ja nach Gl. (77) tatsächlich geschehen ist, daß die Lösung Gl. (81) nicht nur in einem kleinen Raum-Zeit-Ausschnitt gültig ist, so müssen die Konstanten c_2 und c_4 wegen der Kleinheitsbedingung

$|h_{ab}| \ll 1$ verschwinden, da $u = t - x$ beliebig groß werden kann. Diese Einschränkung ist aber, wie wir vorhin gesehen haben, geometrisch unerheblich. Aus beiden Gründen sollten die Gln. (81) in ihrer endgültigen Form ohne die u-proportionalen Terme geschrieben werden.

Um die Linearisierung der Modell-Theorie zu vervollständigen, muß auch die York-Lichnerowicz-Gleichung in erster Ordnung bezüglich h_{ab} angeschrieben werden. Den dort auftretenden Krümmungskalar von $\tilde{\gamma}_{ab}^{\text{appr.}}$ erhalten wir aus der Kontraktion von Gl. (72):

$$\tilde{R}^{\text{appr.}} = \partial^m \partial^n h_{mn} \,. \tag{82}$$

Der kovariante Laplace-Operator $\tilde{\gamma}^{ab} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b$ wird anschließend durch den flachen Laplace-Operator $\triangle = \partial^m \partial_m$ approximiert. Die in der Modell-Theorie verwendete Version der York-Lichnerowicz-Gleichung Gl. (41) lautet damit linearisiert wie folgt:

$$\phi^{-4}\, \partial^m \partial^n h_{mn} - 8\phi^{-5} \triangle \phi + \tfrac{2}{3}\tau^2 = 4\,\rho \,. \tag{83}$$

In der Blätterungsbedingung Gl. (43) übernehmen wir die Näherung für R aus Gl. (83). Damit lautet sie

$$\begin{aligned} \gamma^{ab}\, \nabla_a \nabla_b N = {} & N\phi^{-4}\, \partial^m \partial^n h_{mn} - 8\phi^{-5} \triangle \phi - \partial_t \tau + N\tau^2 \\ & + N\,(\operatorname{tr} S - 3\rho) \;. \end{aligned} \tag{84}$$

Die linke Seite dieser Gleichung muß aber auch noch linear in h_{ab} geschrieben werden. Dazu muß in der Beziehung $\gamma^{ab}\, \nabla_a \nabla_b N = \triangle N - (\partial_a N) \Gamma^a{}_{mn}\, \gamma^{mn}$ das Christoffel-Symbol $\Gamma^a{}_{mn}$ und die Metrik γ^{mn} mit Hilfe von h_{ab} und ϕ ausgedrückt werden. Man erhält nach einigem Rechnen als linearisierte Blätterungsbedingung die Gleichung

$$\begin{aligned} \triangle N = {} & \phi^{-4}\, (\partial_a N) \left(\partial_k h^{ak} - 2\phi^{-1}\, \partial^a \phi \right) \\ & N\phi^{-4}\, \partial^m \partial^n h_{mn} - 8\phi^{-5} \triangle \phi \\ & - \partial_t \tau + N\tau^2 + N\,(\operatorname{tr} S - 3\rho) \;. \end{aligned} \tag{85}$$

Damit ist die Modell-Theorie komplett linearisiert. Wie man nun leicht nachrechnet, ergänzt sich die obige Wellenlösung mittels Gl. (83) und Gl. (85) zum vierdimensionalen Linienelement

$$^{(4)}ds^2 = -dt^2 + dx^2 + (1+\alpha)\,dy^2 + \beta\,dy\,dz + (1-\alpha)\,dz^2\,. \qquad (86)$$

Diese Raum-Zeit-Metrik hat die Form einer aus der allgemeinen Relativitätstheorie bekannte ebene Gravitationswelle. Wir bemerken, daß sich die Abstände parallel zur Ausbreitungsrichtung x der Welle nicht verändern. Die Gravitationswelle ist daher transversal polarisiert.

In alternativen Gravitationstheorien treten häufig nicht nur die aus der Einsteinschen Theorie bekannten transversalen Gravitationswellen auf, sondern meistens auch longitudinal polarisierte Wellen[38]. Ob das auch für die vorgelegte Modell-Theorie zutrifft, werden wir zusammen mit einer Erweiterung der obigen Wellenlösung auf beliebige Frequenzen im folgenden Kapitel untersuchen.

8. Gravitationswellen in der Modell-Theorie

Im vergangenen Kapitel haben wir eine Lösung der linearisierten Bewegungsgleichung Gl. (76) gefunden. Diese stellt eine transversale Quadrupol-Welle dar, die sich mit Lichtgeschwindigkeit fortbewegt. Im Gegensatz zur allgemeinen Relativitätstheorie ist die Frequenz dabei fest vorgegeben. Es stellt sich nun die Frage, wohin die anderen Frequenzen verschwunden sind. Eine genauere Untersuchung und eine kleine Erweiterung der Lösung Gl. (81) führt uns zur Auflösung dieses Rätsels. Die durch Gl. (76) vorhergesagten Gravitationswellen weisen nämlich schon im Vakuum Dispersion auf. Das heißt, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit v der Gravitationswelle mit der Frequenz ω der Welle gekoppelt ist. Wir betrachten wieder die lineare Störung

$$h_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & -\alpha \end{pmatrix} . \tag{87}$$

Diesmal sollen jedoch α und β von $U = v\,t - x$ statt wie im letzten Kapitel von $u = t - x$ abhängen. Nach kurzer Rechnung erhält man als Lösung für α und β aus der Bewegungs-Gl. (76)

$$\alpha = c_1 + U\,c_2 + A_1 \sin\left(2v^2\,U\right) + A_2 \cos\left(2v^2\,U\right) , \tag{88a}$$

$$\beta = c_3 + U\,c_4 + A_1 \cos\left(2v^2\,U\right) - A_2 \sin\left(2v^2\,U\right) . \tag{88b}$$

Die Konstanten besitzen die gleiche Bedeutung wie vorher bei Gl. (81). Wir sehen sofort, daß die Frequenz der Gravitationswelle um so höher ist, je schneller sich die Welle im Vakuum fortbewegt. Die Wellenzahl $k = 2v^2$, die umgekehrt proportional zur Wellenlänge λ ist, hängt quadratisch von der Phasengeschwindigkeit v ab. Dieses v wird wegen der hier gewählten natürlichen Einheiten mit $c = 1$ in Vielfachen der Lichtgeschwindigkeit gemessen. Für die Kreisfrequenz $\omega = 2v^3$ ergibt sich die Dispersionrelation $\omega(k) \sim k^{3/2}$. Eine von c abweichende Ausbreitungsgeschwindigkeit der Gravitationswellen tritt häufig in zur Einsteinschen Theorie alternativen Gravitationstheorien auf und widerspricht *nicht* der speziellen Relativitätstheorie oder dem Einsteinschen Äquivalenzprinzip (Ref. 38, Kapitel 10.1). Es besteht immer die Möglichkeit, eine lokale Lorentz-Geometrie einzuführen, in der die speziell-relativistischen Gesetze gelten. Die Wirkung der Gravitationswelle Gl. (87) mit Gl. (88) auf Testteilchen ist identisch mit der einer vergleichbaren Einsteinschen Gravitationswelle, wenn man von der unterschiedlichen Phasengeschwindigkeit einmal absieht. Die Bewegungsgleichung eines langsamen Testteilchens lautet[21]

$$\tfrac{d^2}{dt^2} x^i = -{}^{(4)}\Gamma^i{}_{00} = 0 \tag{89}$$

und zeigt, daß sich das Teilchen beim Durchgang einer Welle relativ zum Koordinatensystem nicht bewegt. Die relative Beschleunigung zweier solcher Teilchen mit räumlichen Abstand n^i wird wie in der allgemeinen Relativitätstheorie bestimmt durch die Differentialgleichung

$$\tfrac{d^2}{dt^2} n^i = -R^i{}_{0k0}\, n^k = \tfrac{1}{2}\partial_t \partial_t h^i{}_k\, n^k\,. \tag{90}$$

Man stellt damit fest, daß der Abstand zwischen den beiden Teilchen oszilliert. Ist die Phasengeschwindigkeit der Welle größer als c, hat dies auf die Teilchen keine besonderen Auswirkungen, da sich die Welle wie in der allgemeinen Relativitätstheorie nur senkrecht zur Ausbreitungsrichtung bemerkbar macht und nicht in der Ausbreitungsrichtung selber.

In alternativen Gravitationstheorien treten häufig nicht nur die aus der Einsteinschen Theorie bekannten transversalen Gravitationswellen auf, sondern meistens auch longitudinal polarisierte Wellen. Wir prüfen nun, ob auch in der vorgelegten Modell-Theorie aus der linearisierten Bewegungsgleichung die Existenz von Longitudinalwellen folgt. In einer beliebigen metrischen Gravitationstheorie gibt es im allgemeinsten Fall sechs verschiedene Polarisationsmoden bei Gravitationswellen[38], von denen in der allgemeinen Relativitätstheorie bekanntlich nur zwei transversale Moden realisiert sind[21]. Die zusätzlichen Moden können experimentell durch die Wirkungen unterschieden werden, die sie etwa auf einen Ring von Testteilchen ausüben. Die ebene Welle bewege sich im folgenden ebenso wie die oben in Gl. (88) angegebene Lösung immer in x-Richtung. Das bedeutet, daß die Funktionen, welche die Welle und damit die Auswirkungen auf die Testteilchen repräsentieren, nur von $U = vt - x$ abhängen können. Die Positionen der Testteilchen gehorchen beim Durchgang der Gravitationswelle für kleine Auslenkungen dem folgenden Gesetz[21]

$$x_{j\ B(t)} = x^k_{B_0} \left(\eta_{jk} + \tfrac{1}{2} h_{jk}\right) \ . \tag{91}$$

Longitudinale Wellen sind nun dadurch gekennzeichnet, daß sich beim Durchgang der Gravitationswelle auch Auswirkungen in Fortbewegungsrichtung zeigen. In unserem Falle bedeutet dies, daß die Testteilchen auch in x-Richtung verschoben werden können. Im allgemeinen Klassifizierungsschema der Polarisationsmoden sind drei der sechs Moden longtudinaler Natur[38].

Wir zeigen jetzt durch Widerspruch, daß unsere Modell-Theorie genau wie die Einsteinsche Theorie keine longitudinale Wellen zuläßt. Das ist insofern bemerkenswert, als die weitaus meisten Konkurrenztheorien longitudinale Wellen sehr wohl erlauben. Wir nehmen dazu zunächst an, daß es tatsächlich eine Störung h_{jk} gibt, die zu einer Verschiebung des Testteilchens in x-Richtung führt. Dies ist nur dann nach Gl. (91) möglich, wenn die h_{1k}-Komponenten nicht alle verschwinden. Die von null verschiedenen Komponenten von h_{1k} müssen nun aber die Abhängigkeit von t und x nur über die Kombination $U = vt - x$ erfahren. Durch einfaches Einsetzen läßt sich dann zeigen, daß die linearisierte Bewegungsgleichung mit einer derartig beschaffenen Störung h_{jk} *keine* oszillatorische Lösung wie etwa in Gl. (88) zuläßt, wenn man $\operatorname{tr} h = 0$ berücksichtigt.

Ein h_{jk} beispielsweise vom Typ

$$h_{jk} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \zeta \\ \beta & -\alpha & 0 \\ \zeta & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{92}$$

führt für α, β und ζ lediglich zu dem linearen Anteil der Lösung aus Gl. (88), nicht aber zu dem oszillatorischen Anteil. Das bedeutet, daß wir in unserer Modell-Theorie zumindest auf dem Niveau der linearisierten Bewegungsgleichung keine Lösung für longitudinale Wellen erhalten.

Im folgenden Kapitel ist es nun unser Ziel, die physikalischen und mathematischen Eigenschaften der Bewegungsgleichung Gl. (39) sowie die ihrer Linearisierung Gl. (76) genauer zu untersuchen. Der parabolische Charakter dieser partiellen Differentialgleichung steht dabei im Mittelpunkt.

9. Analyse der Bewegungsgleichung

Nachdem wir die Natur der Gravitationswellen und insbesondere auch ihr dispersives Verhalten in der Modell-Theorie kennengelernt haben, wollen wir nach Lösungen der Bewegungsgleichung Gl. (77) suchen, die nun aber *keinen* Wellencharakter haben. Eine davon ist beispielsweise

$$h_{23} = h_{32} = \Phi\,(y) + t\Psi\,(y) \ , \tag{93}$$

und alle anderen Komponenten verschwinden. Die Funktionen Φ und Ψ sind frei wählbar, die h_{ab} müssen aber nach wie vor der Kleinheitsbedingung $|h_{ab}| \ll 1$ genügen. Diese Lösung entspricht keiner echten Dynamik der unimodularen Metrik $\tilde{\gamma}_{ab}$, weil der Riemann-Tensor der daraus mit Gl. (70) gewonnenen Metrik verschwindet. Die Lösung Gl. (93) gehört daher zu einer reinen Koordinatentransformation, also einer Transformation bei der sich die der Metrik zugrundeliegende Geometrie nicht verändert. Bei dem ähnlichen Ansatz für die Diagonalelemente von h_{ab}, beispielsweise mit

$$h_{11} = \quad \Phi\,(x) + t\Psi\,(x) \ , \tag{94a}$$

$$h_{22} = -\Phi\,(x) - t\Psi\,(x) \tag{94b}$$

kann man die Funktionen Φ und Ψ hingegen nicht frei wählen. Aus der Bedingung $\mathrm{tr}\, h = 0$ zusammen mit der Bewegungsgleichung Gl. (77) folgt nämlich, daß die dritte Ableitung von Φ und Ψ verschwinden muß. Deshalb sind hier Φ und Ψ Polynome zweiter Ordnung in x. Diese Lösung ist deshalb mathematisch überhaupt nur in einem begrenzten Raum-Zeit-Intervall gültig. Wie im vorhergehenden Kapitel erläutert, soll aber h_{ab} überall eine *kleine* Störung einer Metrik eines flachen Raumes sein. Von der resultierenden Metrik $\eta_{ab} + h_{ab}$ ist deshalb zu erwarten, daß sie im wesentlichen die gleichen Eigenschaften wie η_{ab} besitzt.

Damit $\eta_{ab} + h_{ab}$ ebenso wie die Metrik h_{ab} überall regulär bleibt, ist es selbstverständlich zu fordern, daß die Kleinheitsbedingung $|h_{ab}| \ll 1$ überall gilt. Sowohl aus mathematischen als auch aus physikalischen Gründen ist es deshalb gerechtfertigt, singuläre Lösungen oder im Unendlichen ansteigende Lösungen, die nur lokal gültig sein können, aus der Menge der brauchbaren Lösungen auszuschließen. Aus diesem Grund ist der Ansatz aus Gl. (94) keine physikalische Lösung der linearisierten Bewegungsgleichung. Einschränkend muß man bei dieser Argumentation allerdings beachten, daß damit zwar die physikalischen Lösungen der *linearisierten* Bewegungsgleichung gekennzeichnet sind, daß aber die Frage, welche Lösungen der linearisierten Gleichung dann aber tatsächlich in der *nichtlinearen* Bewegungsgleichung auftreten oder nicht auftreten können, damit noch nicht beantwortet wird[10]. Hierzu müßte eine recht aufwendige mathematische Analyse über Linearisierungsstabilität erfolgen.

Damit kennen wir bis jetzt drei voneinander verschiedene Lösungstypen der linearisierten Bewegungsgleichung Gl. (77). Es treten zum einen wellenartige Lösungen zu allen Frequenzen auf, die sich aber nicht wie in der allgemeinen Relativitätstheorie mit konstanter Geschwindigkeit c ausbreiten, sondern schon im Vakuum Dispersion zeigen. Dann gibt es Lösungen, die Koordinatentransformationen darstellen. Schließlich sind uns die unbrauchbaren Lösungen begegnet, die nur lokal gültig sind, weil sie irgendwo im globalen Definitionsgebiet singulär werden. Diese dritte Klasse von Funktionen stellt keine wirkliche Lösungsmöglichkeit von Gl. (77) dar. Während man in der linearisierten Einsteinschen Theorie ziemlich leicht alle Lösungen klassifizieren kann, bleibt es bisher eine offene Frage unserer Modell-Theorie, ob die drei genannten Gruppen die einzig möglichen Lösungstypen der linearisierten Bewegungsgleichung für die unimodulare Drei-Metrik darstellen. Aus der Sicht des Autors ist das zu vermuten.

Die Tatsache, daß Gl. (39) die Dispersion von Gravitationswellen schon im Vakuum vorhersagt, zeigt deutlich, daß diese Gleichung ebenso wie ihre Linearisierung keine Wellengleichung im üblichen mathematischen Sinn ist. Als Wellengleichung pflegt man eine partielle Differentialgleichung vom hyperbolischen Typ, die dieses Phänomen nicht zeigt, zu bezeichnen. Partielle Differentialgleichungen zeigen große Unterschiede in der Art, wie sich Unstetigkeiten des durch sie kontrollierten Feldes ausbreiten. Diese Singularitäten können sich nur entlang charakteristischer Hyperflächen—den sogenannten Charakteristiken der Differentialgleichung—ausbreiten[5,31]. Die Typeneinteilung der partiellen Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung in parabolische, elliptische und hyperbolische Differentialgleichungen leitet sich direkt von der Art der Charakteristiken ab. Während man den Differentialgleichungen bis zu zweiter Ordnung wegen ihres häufigen Auftretens in der Physik ziemlich schnell ihren Typ ansehen kann, müssen wir bei der analogen Analyse der Charakteristiken der Bewegungsgleichung bei unserer Modelltheorie Gl. (77) etwas mehr Aufwand betreiben.

Wir demonstrieren dieses Verfahren[26] der Einfachheit wegen zunächst an der eindimensionalen Diffusionsgleichung

$$\Diamond F\left(t,x\right) := \left(\frac{d}{dt} - \frac{d^2}{dx^2}\right) F\left(t,x\right) = 0\,. \tag{95}$$

Den Diffusionsoperator haben wir dabei mit $\Diamond$ bezeichnet. Für die Funktion F machen wir nun den Ansatz

$$F\left(t,x\right) = a\left(t,x\right) + \theta\left(w\left(t,x\right)\right) u\left(t,x\right)\,, \tag{96}$$

wo θ die Heavisidesche Stufenfunktion ist. Sie prägt auf $a(t,x)$ eine sprunghafte Unstetigkeit $u(t,x)$ auf, die sich entlang der Hyperfläche $w(t,x)=0$ ausbreitet. Diese Hyperfläche $w=0$ wollen wir jetzt ausfindig machen. Dazu setzen wir den Ansatz aus Gl. (96) in die Diffusionsgleichung Gl. (95) ein und erhalten

$$\Diamond F = ... + \Diamond a + \theta\left(w\right)\Diamond u = 0\,. \tag{97}$$

Die drei Punkte deuten singuläre Terme an, die verschwinden müssen, wenn Gl. (97) gültig sein soll. Im einzelnen lauten diese Terme

$$\delta'(w)\,u\left(-\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right) \tag{98}$$

und

$$\delta(w)\left(-2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u\Diamond w\right). \tag{99}$$

Mit δ und δ' bezeichnen wir die Diracsche δ-Funktion und ihre Ableitung. Die Koeffizienten dieser Distributionen müssen einzeln verschwinden. Aus dem Term in Gl. (98) erhalten wir bei beliebiger Störung u als Bedingung für w

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0\,. \tag{100}$$

Ein solches w definiert mit $w = 0$ als charakteristische Hyperflächen die Flächen $t = konst$, was die Diffusionsgleichung Gl. (95) als parabolische Differentialgleichung enthüllt. Da sich Störungen des Feldes auf den Charakteristiken ausbreiten, sieht man, daß diese in der Diffusionsgleichung mit unendlicher Geschwindigkeit propagieren.

Nach dieser Erläuterung des allgemeinen Verfahrens zur Bestimmung der charakteristischen Hyperflächen einer partiellen Differentialgleichung, versuchen wir nun die Charakteristiken der linearisierten Bewegungsgleichung für die unimodulare Drei-Metrik, die etwas umgeschrieben

$$\Diamond h_{ab} := \partial_t\partial_t h_{ab} - \tilde{Y}_{ab}^{\text{appr.}} = 0 \tag{101}$$

lautet, zu bestimmen. Damit wird gleichzeitig der Operator $\Diamond$ neu definiert. Die Differentialgleichung Gl. (101) zeichnet sich durch das Auftreten von räumlichen Ableitungen dritter Ordnung aus, wogegen die Zeitableitungen nur von zweiter Ordnung sind. Eine gewisse formale Ähnlichkeit mit der Diffusionsgleichung

Gl. (95) ist damit immerhin gegeben. Ob sich das auch auf die Charakteristiken selber überträgt, werden wir jetzt berechnen. Als lineare Störung h_{ab} betrachten wir

$$h_{ab} = A_{ab} + \theta\,(w)\,u_{ab}\,. \tag{102}$$

Die symmetrischen Tensoren A_{ab} und u_{ab} müssen natürlich wie h_{ab} spurfrei sein. Nach dem Einsetzen diese Ansatzes in Gl. (101) erhalten wir

$$\Diamond h_{ab} = ... + \Diamond A_{ab} + \theta\,(w)\,\Diamond u_{ab} = 0\,. \tag{103}$$

Die drei Punkte deuten wie oben singuläre Terme an, die der Übersichtlichkeit wegen weggelassen sind. Sie müssen wieder verschwinden, damit Gl. (102) ein gültiger Ansatz bleibt. Der für die Bestimmung der Charakteristik wichtige Term lautet

$$\begin{aligned}\delta(w)''\,\frac{1}{4}(\eta^{de}(\partial_c w)(\partial_d w)(\partial_e w)(\epsilon_a{}^{cf}u_{bf} + \epsilon_b{}^{cf}u_{af})\\ -\,(\partial_c w)(\partial_d w)(\epsilon_a{}^{ce}u^d{}_e\,\partial_b w + \epsilon_b{}^{ce}u^d{}_e\,\partial_a w))\,.\end{aligned} \tag{104}$$

Der Koeffizient der δ''-Funktion verschwindet, falls

$$\frac{\partial w}{\partial x^a} = 0 \tag{105}$$

für alle a gilt. Die charakteristischen Hyperflächen der Differentialgleichung Gl. (101) sind daher wie im Fall der Diffusionsgleichung die Hyperflächen mit $t = konst$, so daß wir die Bewegungs-Gl. (101) in Anlehnung an die Klassifizierung der Differentialgleichungen zweiter Ordnung als parabolisch bezeichnen können. Damit ist gezeigt, daß sich eine scharfe Störung des metrischen Feldes rein formal mit unendlicher Geschwindigkeit ausbreitet.

Auf den ersten Blick scheint die Bewegungsgleichung Gl. (101) daher eine instantane Wechselwirkung zu propagieren, was man in der Physik im allgemeinen zu vermeiden sucht. Bei parabolischen Differentialgleichungen *zweiter* Ordnung für reelle Variablen führt an dieser Schlußfolgerung kein Weg vorbei. Betrachtet man jedoch die parabolischen Differentialgleichungen höherer und hier insbesonderer *dritter* Ordnung, so erkennt man, daß diese durchaus andere Eigenschaften besitzen können als die gewöhnlichen reellwertigen parabolischen Gleichungen zweiter Ordnung und sich zum Beispiel nicht unbedingt wie eine Diffusionsgleichung verhalten. Wir müssen uns daher vor falschen Schlußfolgerungen hüten. Wir werden jetzt nämlich durch eine *plausible* Überlegung demonstrieren, daß die Charakteristiken $t = konst$ der Bewegungsgleichung unserer Modell-Theorie tatsächlich keine instantanen, sondern nur endlich schnelle Ausbreitungen von echten Störungen impliziert; und daß der parabolische Charakter der Bewegungsgleichung nicht im Widerspruch zu der Existenz von Wellenlösungen wie derjenigen vom Anfang dieses Kapitels steht, sondern sogar von diesen Wellenlösungen vorhergesagt wird.

Zunächst stellen wir fest, daß Wellenlösungen existieren, und daß die Phasengeschwindigkeit der Wellen mit der Frequenz der Welle zunimmt, wobei die Lichtgeschwindigkeit überschritten werden kann, was wiederum—wie schon weiter oben erwähnt—aus der Sicht der speziellen Relativitätstheorie kein Problem darstellt, da es sich um Gravitationswellen handelt. Wir bemerken zum Vergleich, daß in der Diffusionsgleichung keine Wellenlösungen auftreten, so daß die folgende Argumentation auf diese parabolische Differentialgleichunge zweiter Ordnung nicht zutrifft. Wir betrachten nun nochmals die obige Störung

$$h_{ab} = A_{ab} + \theta\,(w)\,u_{ab}\,, \tag{106}$$

die uns dazu gedient hat, die charakteristischen Hyperflächen $w = 0$ ausfindig zu machen. Dabei sind A_{ab} und u_{ab} separate Lösungen der linearisierten Bewegungs-Gleichung. Durch die Stufenfunktion θ wird die Störung u_{ab} auf der Hyperfläche $w = 0$ plötzlich eingeschaltet. Die genaue Lage dieser Hyperfläche sei zunächst unbekannt. Die Tensoren A_{ab} und u_{ab} werden aus einer der drei Lösungsgruppen, die weiter oben beschrieben wurden, ausgewählt. Für den Zeitraum $w < 0$ ist

A_{ab} die alleinige Lösung, ab dem Zeitpunkt $w = 0$ wird die Störung u_{ab} hinzugeschaltet. Versucht man dieses Lösungsbild *ohne* die Verwendung der Stufenfunktion zu erhalten, so stellt man im Sinne einer Fourier-Analyse fest, daß man sämtliche Frequenzen benötigt, um diese Lösung darzustellen. Man kann dies etwa mit A_{ab} und u_{ab} als Wellenlösungen mit verschiedenen Ausbreitungsgeschwindigkeiten leicht nachvollziehen. Wie wir aber gesehen haben, ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit in der Modell-Theorie im Gegensatz zur allgemeinen Relativitätstheorie direkt mit der Frequenz verknüpft. Durch die scharfe Störung tauchen auch beliebig hohe Frequenzen in der Fourier-Analyse auf, die zu einer entsprechend unbegrenzt hohen Ausbreitungsgeschwindigkeit führen. Aus diesem Grund folgern wir, daß die Charakteristiken der Bewegungs-Gl. (77), die wir oben aus der Ausbreitung einer scharfen Störung berechnet haben, die Hyperflächen mit $t = konst$ sind. Das bedeutet, daß man *aus der bloßen Existenz* von dispersiven Wellenlösungen des hier aufgetretenen Typus auf den parabolischen Charakter der Bewegungsgleichung schließen kann. Im Gegensatz zu partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung für reelle Variablen, wo dieser Schluß nicht möglich ist, ist es daher in partiellen Differentialgleichungen von dritter Ordnung durchaus möglich, daß eine reellwertige parabolische Gleichung endliche Ausbreitungsgeschwindigkeiten vermittelt.

Diese auf den ersten Blick seltsam scheinende Eigenschaft ist auch von einer anderen parabolischen Differentialgleichung bekannt, die von *zweiter* Ordnung in der Zeit ist und eine *komplexe* Feldvariable besitzt. Diese Gleichung—die Schrödingergleichung—impliziert durch ihre Parabolizität ebenfalls, daß sich eine mathematisch scharfe Störung mit unendlicher Geschwindigkeit ausbreitet. Wie in der Bewegungsgleichung der Modell-Theorie treten bekanntlich auch bei der Schrödinger-Gleichung schon im Vakuum dispersive Wellenlösungen auf. Die obigen Schlußfolgerungen lassen sich deshalb auch auf die Schrödinger-Gleichung übertragen. Das Interessante an der Bewegungsgleichung Gl. (76) ist damit, daß sie sich in gewisser Hinsicht ähnlich wie die Schrödinger-Gleichung verhält, und das mit reellen Feldvariablen und nicht im Komplexen. Der Preis dafür ist offensichtlich die Erhöhung des Grades der Differentialgleichung. Unter diesem Gesichtspunkt kann man es vertreten, die Bewegungsgleichung Gl. (76) als "Wellengleichung" aufzufassen, obwohl sie keine hyperbolischen Charakteristiken besitzt, genau wie man die Schrödinger-Gleichung trotz ihrer parabolischen Form als Wellengleichung bezeichnet.

Nach diesem etwas mathematischerem Kapitel wollen wir nun verschiedene konzeptionelle Verwandtschaften zwischen der hier vorgelegten Modell-Theorie und anderen Theorien der Raum-Zeit aufzeigen, die sich auch entweder mit konformen Transformationen oder mit einer unimodularen Metrik beschäftigen, um die Stellung unserer Modell-Theorie im Theoriengefüge der bisherigen Physik besser zu verstehen.

10. Vergleich mit anderen Theorien

In dieser Arbeit wird eine Theorie der Raum-Zeit vorgestellt, die auf der Basis von unimodularen Drei-Metriken arbeitet. Es ist für ein tieferes Verständnis interessant zu sehen, welche Gemeinsamkeiten und Ähnlichkeiten zwischen diesem Modell und anderen von der allgemeinen Relativitätstheorie verschiedenen Ansätzen bestehen. In diesem Kapitel werden wir einen Vergleich mit der Einstein-Fokker-Theorie von 1914 und der unimodularen Theorie von Einstein aus dem Jahre 1919 ziehen.

Die Einstein-Fokkersche Theorie der Gravitation[21] ist eine Umschreibung der Nordströmschen Gravitationstheorie von 1913. Sie ist vierdimensional formuliert und betrachtet wie die Modelltheorie der vorliegenden Arbeit den konformen Teil einer diesmal jedoch vierdimensionalen Raum-Zeit-Metrik $g_{\mu\nu}$ und den dazugehörigen Skalenfaktor ϕ. Der konform invariante Anteil von $g_{\mu\nu}$ wird per Postulat zum Verschwinden gebracht, das heißt man fordert

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} = 0\,. \tag{107}$$

Dies bedeutet, daß man die Vier-Metrik schreiben kann als

$$g_{\mu\nu} = \phi^4\,\eta_{\mu\nu}\,. \tag{108}$$

Die Tensor $\eta_{\mu\nu}$ ist dabei die Metrik einer Riemann-flachen Raum-Zeit mit Signatur $(-,+,+,+)$. Den Skalenfaktor bekommt man aus einer ähnlichen Zwangsbedingung wie in unserer Modell-Theorie. Der Krümmungsskalar von $g_{\mu\nu}$ muß nach Einstein und Fokker der Gleichung

$$R = 6\,\mathrm{tr}\,T \tag{109}$$

genügen,wobei $\mathrm{tr}\,T$ die Spur des Energie-Impuls-Tensors $T_{\mu\nu}$ ist. Wir stellen eine gewisse Verwandschaft dieser Gleichung mit der ADM-Hamiltonian-Zwangsbedingung fest. Aus Gl. (109) bekommt man den Skalenfaktor ϕ in der gleichen

Art und Weise, wie man die York-Lichnerowicz-Gleichung aus dem Hamiltonian-Constraint erhält. Als Gleichung für ϕ erhält man

$$\phi^{-5}\,\eta^{\mu\nu}\,\tilde{\nabla}_\mu\tilde{\nabla}_\nu\phi = 6\,\mathrm{tr}\,T\,. \tag{110}$$

Dabei ist $\tilde{\nabla}_\mu$ die mit $\eta_{\mu\nu}$ kompatible kovariante Ableitung. Beim Aufinden einer vierdimensionalen Lösungsmetrik muß man zunächst diese letzte Gleichung nach einem passendem ϕ bei geeigneten Randbedingungen auflösen. Dieser Skalenfaktor gibt dann zusammen mit der Beziehung Gl. (108) die gesuchte Raum-Zeit-Metrik, deren Geodäten die Bahnen von Testtteilchen beschreiben soll.

Das Interessante an der Einstein-Fokkerschen Theorie—die keine Lichtablenkung vorhersagt und deshalb experimentell widerlegt ist—ist die große formale Ähnlichkeit mit unserer Modell-Theorie, wenn man dort auf die Dynamik verzichtet, d.h. wenn der York-Tensor verschwindet. Der einzig essentielle Unterschied besteht dann "nur" in der Anzahl der betrachteten Dimensionen. Es ist erstaunlich, daß offensichtlich erst das Aufgeben der vierdimensionalen Schreibweise, die man ja bis heute als die in gewissen Sinne "bessere" Schreibweise ansieht, dazu führt, daß dieser mit dem Skalenfaktor ϕ arbeitende Formalismus physikalisch sinnvolle Resultate wie die Schwarzschild-Metrik hervorbringt.

Die zweite Gravitationstheorie, die gewisse Ähnlichkeit mit der Modell-Theorie dieser Arbeit aufzeigt, ist die von Einstein im Jahr 1919—also nach seiner allgemeinen Relativitätstheorie—vorgeschlagene Gravitationstheorie auf der Basis einer *vierdimensionalen* unimodularen Metrik. Diese Theorie führte lange Zeit ein Schatten-Dasein im Vergleich zur allgemeinen Relativitätstheorie und wurde erst 1989 von Unruh wiederentdeckt[34,35]. Im Zentrum steht dabei wie in der allgemeinen Relativitätstheorie die Einstein-Hilbertsche Lagrangedichte

$$S = \frac{1}{4}\int d^4x\,\sqrt{-g}\;R\,. \tag{111}$$

Diesmal soll aber für die vierdimensionale Metrik die Unimodularitätsbedingung $\det g_{\mu\nu} = 1$ gelten. Variation führt zur Vakuum-Feldgleichung

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{4} R\, g_{\mu\nu} = 0\,. \tag{112}$$

Aus der Bianchi-Identität

$$\nabla_\mu \left(R^\mu_\nu - \tfrac{1}{2} R\, g^\mu_\nu \right) = 0 \tag{113}$$

erhalten wir mit Gl. (112) die zusätzliche Gleichung

$$\partial_\mu R = 0 \tag{114}$$

mit der Lösung

$$R = -\Lambda\,. \tag{115}$$

Λ stellt eine beliebige Integrationskonstante dar. Die Feldgleichung Gl. (112) kann man damit als Einstein-Gleichung mit einer "kosmologischen" Konstanten schreiben:

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} = \Lambda\, g_{\mu\nu}\,. \tag{116}$$

Zu beachten ist dabei allerdings immer die Unimodularität von $g_{\mu\nu}$. Da man aber jede Lösung der Einsteinschen Gleichungen mit einer kosmologischen Konstante zumindest lokal in derartigen Koordinaten schreiben kann, stellen wir fest, daß die Feldgleichung Gl. (112) die gleichen physikalischen Vorhersagen macht wie die Einstein-Gleichungen mit einer kosmologischen Konstante. Das Interessante dieser Theorie ist die Verwendung einer unimodularen Metrik als Basis der Theorie. Man sieht, daß trotz der Brechung der allgemeinen Kovarianz eine physikalisch vernünftige Theorie konstruiert werden kann. Als "Belohnung" für diesen Schritt erhält man dafür die kosmologische Konstante auf ganz natürliche Art und Weise und nicht durch eine etwas künstliche Addition wie in der allgemeinen Relativitätstheorie. Die Bewegungsgleichung der in Kapitel 4 vorgestellten

Theorie, die eine dreidimensionale unimodulare Metrik als dynamisches Objekt ansieht, bricht mit der allgemeinen Kovarianz ebenfalls in dem Sinn, daß die Koordinatenbedingung $\det\tilde{\gamma}_{ab} = 1$ immer erfüllt sein muß. Gerade diese Tatsache führt aber mehr oder weniger geradeaus zu Gl. (39) und zu allen aus ihrfolgenden Vorhersagen. Einige der Prognosen dieser Modell-Theorie wie etwa die Dispersion von Gravitationswellen und die Existenz von Wellenlösungen zu einer parabolischen Feldgleichung dritter Ordnung verdienen durchaus das Prädikat "ungewöhnlich" oder "ungewohnt". Aber gerade deswegen steht diese Gleichung in bester physikalischer Tradition, weil der Fortschritt (nicht nur) in der theoretischen Physik großenteils durch Abbau von Vorurteilen vorangetrieben wird. Diese Funktion ist das Hauptziel dieses Modells für eine *mögliche* Dynamik der Raum-Zeit.

Im nächsten Kapitel werden wir daher einige aus der Sicht des Autors wichtige Konsequenzen der Theorie und daraus sich ergebende offene Fragen anschneiden und zur Diskussion stellen.

11. Ausblick

Die Modell-Theorie der Dynamik der Raum-Zeit auf der Basis unimodularer Drei-Metriken, die wir in dieser Arbeit in Kapitel 4 entwickelt und präsentiert haben, ist die erste physikalische Theorie von Raum und Zeit, in der die Yorksche Forderung nach der expliziten Darstellung der wahren Freiheitsgrade des Gravitationsfeldes in Gestalt des konform invarianten Teiles einer dreidimensionalen Metrik oder in Form einer unimodularen Drei-Metrik erfüllt ist. Von daher ist es nur natürlich, daß sie sich in verschiedenen Punkten von der Einsteinschen allgemeinen Relativitätstheorie, für die eine derartige Umformulierung bis heute nicht geglückt ist, erheblich unterscheidet. In Kapitel 5 haben wir aber auch gesehen, daß wichtige Lösungen der allgemeinen Relativitätstheorie wie die Schwarzschildsche Metrik und die Friedmannsche Metrik sogar exakt aus der Modell-Theorie folgen. Soweit besteht eine gewisse Kompatibilität zwischen diesen beiden Theorien. Andererseits folgt die Ausbreitung der dynamischen Freiheitsgrade der Gravitation in der Modell-Theorie wegen der Parabolizität der Bewegungsgleichung für die unimodulare Metrik $\tilde{\gamma}_{ab}$ völlig anderen Gesetzen. In Kapitel 8 wurde deutlich, daß sich insbesondere Gravitationswellen schon im Vakuum dispersiv verhalten und dabei die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle sowohl wesentlich niedriger als auch höher als die Lichtgeschwindigkeit c sein kann. Wichtig ist dabei jedoch, daß sich diese Geschwindigkeit nur auf die Gravitationswellen selber bezieht und daß die lokale Lichtkegelstruktur mit ihrer Grenzgeschwindigkeit c für alle anderen physikalischen Phänomene, die sich *in* der Raum-Zeit abspielen, erhalten bleibt. Jene Dispersion der Gravitationswellen ist sicherlich der zentrale neue Effekt, der die Modell-Theorie auszeichnet.

Aus der Hydrodynamik, die sich seit langem mit nichtlinearen Bewegungsgleichungen für wellenartige Ausbreitungsvorgänge beschäftigt, ist bekannt, daß entweder Linearität und Dispersionsfreiheit oder Nichtlinearität und Dispersion in Wellengleichungen die Bildung sogenannter solitärer Wellen—der Solitonen—ermöglicht[14]. Die Bewegungsgleichung für unimodulare Drei-Metriken Gl. (39) sorgt in ihrer linearisierten Fassung für die dispersive Ausbreitung von Gravitationswellen. In der allgemeinen Relativitätstheorie breiten sich die Störungen der Metrik dagegen immer mit der konstanten Geschwindigkeit c aus. Man kann zeigen daß diese Eigenschaft nicht nur in den linearisierten Feldgleichungen, sondern auch in exakten Wellenlösungen der Einsteinschen Gleichungen besteht. Daher können wir davon ausgehen, daß die Dispersivität einer Differentialgleichung nicht von der Linearisierung abhängt. Wir nehmen aus diesem Grund an, daß die nichtlineare Bewegungsgleichung $DD\tilde{\gamma}_{ab} = \tilde{Y}_{ab}$ *zugleich* dispersiv ist. Sie erfüllt folglich die elementaren Voraussetzungen für die *mögliche* Existenz von solitären Lösungen[14]. Die naheliegende Frage, ob die Bewegungsgleichung Gl. (39) tatsächlich Solitonen als Lösung zuläßt, ist damit allerdings noch nicht geklärt, da es kein hinreichendes mathematisches Kriterium dafür gibt, daß eine beliebige partielle Differentialgleichung solitäre Wellen enthalten kann. Die explizite Angabe einer derartigen Lösung wäre die einfachste Möglichkeit, dies zu zeigen. Obwohl der Autor keine solche Lösung gefunden hat, ist es dennoch sehr erfreulich zu sehen, daß Solitonen bis auf weiteres—wegen der Dispersivität der fundamentalen Bewegungsgleichung der Modelltheorie—zur Lösungsmenge gehören können.

Wie jede physikalische Theorie beantwortet auch die Modell-Theorie dieser Arbeit nicht nur offene Fragen wie hiervor allem die nach der Realisierbarkeit der Yorkschen Forderung und die sich daraus ergebende Konsequenzen, sondern sie wirft auch neue Fragen auf. Das wohl wichtigste Problem ist die Frage, wie in dieser Modell-Theorie das bekannte Bewegungsproblem behandelt wird[36]. Es sollte möglich sei, nach Art der Näherungen von Einstein, Infeld und Hoffmann[21] einen Formalismus für Mehrkörperprobleme zu entwickeln. Insbesondere dürft die approximative Lösung des Zweikörperproblems mit Anwendung zum Beispiel auf den Doppel-Pulsar PSR1913+16, der in der observationellen Gravitation eine große Bedeutung besitzt und dessen Bahndaten von der allgemeinen Relativitätstheorie korrekt vorhergesagt werden, in der Lage sein, die Modell-Theorie entweder zu rejektieren oder zu bewähren[38]. Zusätzlich sollte man Überlegungen zur Gestalt der Gleichungen der Theorie anstellen, um diese physikalisch besser zu motivieren Während die Bewegungsgleichung

$$DD\tilde{\gamma}_{ab} = \tilde{Y}_{ab} \tag{117}$$

ziemlich eindeutig gefunden werden kann und auch eine gewisse Schönheit wegen ihrer Einfachheit besitzt, kann man sich etwa fragen, welche intrinsischen Gründe es gibt, warum die Differentialgleichung für die Bestimmung der Lapse-Funktion gerade die in Gl. (43) niedergelegte Form haben muß. Es ist dabei interessant zu sehen, daß im Vakuum mit $\tau = 0$ diese Gleichung die Form einer Eigenwert-Gleichung mit R als Eigenwert annimmt, wie man aus Gl. (42) erkennt.

Wie jedoch die Zukunft dieser Gleichungen bzw. der Theorie an sich auch immer aussehen mag, allein durch das Sprengen von vorgefaßten Konventionen durch die Vorhersage des Ungewöhnlichen und auch Ungewohnten dürfte die Modell-Theorie dieser Arbeit auf der Basis unimodularer Drei-Metriken zumindest ihre Hauptfunktion als “Humus” für andere kommende physikalische Theorien bereits erfüllt haben.

Literaturverzeichnis

1. R. Arnowitt, S. Deser, und C. W. Misner, *The dynamics of general relativity*, in: L. Witten (Ref. 39).
2. J. D. Bekenstein, und A. Meisels, *Conformal invariance, microscopic physics, and the nature of gravitation*, Phys. Rev. D 22, 1313 (1980).
3. M. Carmeli, S. I. Fickler, und L. Witten, *Relativity* (Plenum Press, New York, 1970).
4. Y. Choquet-Bruhat, und J. W. York, Jr., *The cauchy problem*, in: A. Held (Ref. 15).
5. R. Courant, und D. Hilbert, *Methoden der mathematischen Physik II* (Springer Verlag, Berlin, 2. Auflage 1967).
6. N. Deruelle, und T. Piran, *Gravitational radiation* (North Holland, Amsterdam, 1982).
7. C. DeWitt, und B. S. DeWitt, *Relativity, groups and topology* (Gordon and Breach, New York, 1964).
8. B. S. DeWitt, *Spacetime as a sheaf of geodesics in superspace*, in: M. Carmeli (Ref. 3).
9. J. Ehlers, persönliche Mitteilung (1994).
10. J. Ehlers, H. Friedrich, A. Rendall, und B. G. Schmidt, *Das Cauchy-Problem* (Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, Garching, 1990).
11. A. E. Fischer, und J. E. Marsden, *The Einstein equations of evolution—a geometric approach*, J. Math. Phys. 13, 546 (1972).
12. T. Fulton, F. Rohrlich, und L. Witten, *Conformal invariance in physics*, Rev. Mod. Phys. 34, 442 (1962).

13. R. P. Gilbert, und R. Newton, Hrsg., *Analytic methods in mathematical physics* (Gordon and Breach, New York, 1970).

14. W. Greiner, H. Stock, *Hydrodynamik* (Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 4. Auflage 1991).

15. A. Held, Hrsg., *General relativity and gravitation* (Plenum Press, New York, 1980).

16. R. A. d'Inverno, und J. Smallwood, *Covariant 2+2 formulation of the initial value problem in general relativity*, Phys. Rev. D. 22, 1233 (1980).

17. J. Isenberg, und J. Nester, *Canonical gravity*, in: A. Held (Ref. 15).

18. J. Isenberg, *Steering the universe*, Found. Phys. 16, 651 (1986).

19. M. A. Markov, V. A. Berezin, und V. P. Frolov, Hrsg., *Quantum gravity* (World Scientific, 1991).

20. J. E. Marsden, und F. J. Tipler, *Maximal hypersurfaces and foliations of constant mean curvature in general relativity*, Phys. Rep. 66, 109 (1980).

21. C. W. Misner, K. S. Thorne, und J. A. Wheeler, *Gravitation* (W. H. Freeman, San Francisco, 1973).

22. N. Ó Murchadha, und J. W. York, Jr., *Existence and uniqueness of solutions of the Hamiltonian constraint of general relativity on compact manifolds*, J. Math. Phys. 14, 1551 (1973).

23. N. Ó Murchadha, und J. W. York, Jr., *Initial-value problem of general relativity. I. General formulation and physical interpretation*, Phys. Rev. D 10, 428 (1974).

24. N. Ó Murchadha, und J. W. York, Jr., *Initial-value problem of general relativity. II. Stability of solutions of the initial-value equations*, Phys. Rev. D 10, 437 (1974).

25. N. Ó Murchadha, und J. W. York, Jr., *Gravitational Energy*, Phys. Rev. D 10, 2345 (1974).

26. R. U. Sexl, und H. K. Urbantke, *Gravitation und Kosmologie* (BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, 3. Auflage 1987).

27. L. C. Shepley, und R. A. Matzner, Hrsg., *Spacetime and geometry* (University of Texas Press, Austin, 1982).

28. L. Smarr, und J. W. York, Jr., *Radiation gauge in general relativity*, Phys. Rev. D. 17, 1945 (1978).

29. L. Smarr, und J. W. York, Jr., *Kinematical conditions in the construction of spacetime*, Phys. Rev. D. 17, 2529 (1978).

30. L. Smarr, Hrsg., *Sources of gravitational radiation* (Cambridge University Press, Cambridge, 1979).

31. A. Sommerfeld, *Partielle Differentialgleichungen der Physik* (Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 5. Auflage 1962).

32. K. Sundermeyer, *Constrained dynamics* (Springer Verlag, Berlin, 1982).

33. F. J. Tipler, *Essays in general relativity* (Academic Press, New York, 1980).

34. W. G. Unruh, *Unimodular theory of canonical quantum gravity*, Phys. Rev. D 40, 1048 (1989).

35. W. G. Unruh, *No time and quantum gravity*, in: M. A. Markov (Ref. 19).

36. J. A. Wheeler, *Geometrodynamics and the problem of motion*, Rev. Mod. Phys. 33, 63 (1961).

37. J. A. Wheeler, *Superspace*, in: R. P. Gilbert (Ref. 13).

38. C. M. Will, *Theory and experiment in gravitational physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2. Auflage 1993).

39. L. Witten, Hrsg., *Gravitation* (Wiley, New York, 1962).

40. J. W. York, Jr., *Gravitational degrees of freedom and the initial-value problem*, Phys. Rev. Lett. 26, 1656 (1971).
41. J. W. York, Jr., *Role of conformal three-geometry in the dynamics of gravitation*, Phys. Rev. Lett. 28, 1082 (1972).
42. J. W. York, Jr., *Mapping onto solutions of the gravitational initial value problem*, J. Math. Phys. 13, 125 (1972).
43. J. W. York, Jr., *Conformally invariant orthogonal decomposition of symmetric tensors on Riemannian manifolds and the initial-value problem of general relativity*, J. Math. Phys. 14, 456 (1973).
44. J. W. York, Jr., *Covariant decomposition of symmetric tensors in the theory of gravitation*, Ann. Inst. H. Poincaré 21, 319 (1974).
45. J. W. York, Jr., *Kinematics and dynamics of general relativity*, in: L. Smarr (Ref. 30).
46. J. W. York, Jr., *Energy and momentum of the gravitational field*, in: F. J. Tipler (Ref. 33).
47. J. W. York, Jr., *The initial value problem and dynamics*, in: N. Deruelle (Ref. 6).
48. J. W. York, Jr., und T. Piran, *The initial value problem and beyond*, in: A. Schild (Ref. 27).
49. J. W. York, Jr., *Boundary terms in the action principles of general relativity*, Found. Phys. 16, 249 (1986).

Anhang: Konventionen und verwendete Symbole

1. Konventionen

Unsere Konventionen folgen:

C. W. Misner, K. S. Thorne, und J. A. Wheeler, *Gravitation*, Ref. 21.

Ausnahme: Wir setzen $4\pi G = 1$ statt $G = 1$.

Im Einzelnen bedeutet das:

natürliche Einheiten	$c = 1$ und $4\pi G = 1$
Raum-Zeit-Indizes	$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \mu, \nu \ldots$
Raum-Indizes	$a, b, c, d \ldots$
Signatur der Raum-Zeit	$(-,+,+,+)$
Riemann-Tensor	$R^a{}_{bcd} = \partial_c \Gamma^a{}_{bd} - \partial_d \Gamma^a{}_{bc} + \Gamma^a{}_{sc}\Gamma^s{}_{bd} - \Gamma^a{}_{sd}\Gamma^s{}_{bc}$
Ricci-Tensor	$R_{ab} = R^m{}_{amb}$

2. Liste verwendeter Symbole

∂	partielle Ableitung
∇_a	kovariante Ableitung kompatibel mit γ_{ab}
$\tilde{\nabla}_a$	kovariante Ableitung kompatibel mit $\tilde{\gamma}_{ab}$
∇_μ	kovariante Ableitung kompatibel mit $g_{\mu\nu}$
$\tilde{\nabla}_\mu$	kovariante Ableitung kompatibel mit $\eta_{\mu\nu}$
$\triangle$	Laplace-Operator (definiert als $\partial^m \partial_m$)

$\Diamond$	speziell definierter Operator, siehe Kapitel 9
$\pounds$	Lie-Ableitungsoperator
$\pounds'$	spurfreie Lie-Ableitung
a_t	Weltradius im Friedmann-Modell
A_{ab}	spurfreier Teil von K_{ab}
c	Lichtgeschwindigkeit, hier $c = 1$
$C_{\mu\nu\rho\sigma}$	Weyl-Tensor in vier Dimensionen
δ	Diracsche δ-Distribution
γ_{ab}	dreidimensionale positiv definite Metrik
$\tilde{A}_{ab}$	spurfreier Tensor
γ	Determinante von γ_{ab}
$\tilde{\gamma}_{ab}$	dreidimensionale unimodulare Metrik mit $\det \tilde{\gamma}_{ab} = 1$
${}^{(4)}\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho}$	Christoffel-Symbol der Metrik $g_{\mu\nu}$
$\Gamma^{a}{}_{bc}$	Christoffel-Symbol der Metrik γ_{ab}
D	geometrisch erweiterter Zeitableitungsoperator
ϵ^{abc}	Levi-Civita-Symbol in drei Dimensionen
η_{ab}	Einheitsmatrix in drei Dimensionen
$\eta_{\mu\nu}$	vierdimensionale Metrik einer flachen Raum-Zeit
θ	Heavisidesche Stufenfunktion
$g_{\mu\nu}$	vierdimensionale Raum-Zeit-Metrik
g	Determinante von $g_{\mu\nu}$
G	Newtonsche Gravitationskonstante, hier $G = 1$
h_{ab}	lineare Störung von η_{ab} mit $\mathrm{tr}\, h = 0$
k	Krümmungskonstante in der Friedmann-Metrik
k	Wellenzahl der Gravitationswelle
K_{ab}	“Geschwindigkeit” von γ_{ab}
λ	Wellenlänge der Gravitationswelle

m	Masse
M^a	Shift-Funktionen
N	Lapse-Funktion
p	Druck
Π^{ab}	Impulsvariable, kanonisch konjugiert zu γ_{ab}
R_{ab}	Ricci-Tensor von γ_{ab}
$R_{\mu\nu}$	Ricci-Tensor von $g_{\mu\nu}$
R	Krümmungsskalar von γ_{ab} oder $g_{\mu\nu}$
$\tilde{R}$	Krümmungsskalar von $\tilde{\gamma}_{ab}$
ρ	Energiedichte
S_{ab}	Spannungstensor (räumlicher Teil von $T_{\mu\nu}$)
$\tilde{\sigma}_{ab}$	"Geschwindigkeit" von $\tilde{\gamma}_{ab}$ mit $\operatorname{tr}\tilde{\sigma} = 0$
$\operatorname{tr} A$	Spur des Tensors A
$T_{\mu\nu}$	vierdimensionaler Energie-Impuls-Tensor
τ	mittlere äußere Krümmung
v	Ausbreitungsgeschwindigkeit der Gravitationswelle
Y_{ab}	York-Tensor
$\tilde{Y}_{ab}$	York-Tensor der unimodularen Metrik $\tilde{\gamma}_{ab}$
ϕ	Skalenfaktor
Φ_N	Newtonsches Gravitationspotential

Danksagung

Sehr herzlich möchte ich Herrn Prof. Dr. Süßmann dafür danken, daß er mir die Bearbeitung dieses interessanten Themas an seinem Lehrstuhl und unter seiner persönlichen Obhut ermöglicht hat. Ihm und Herrn Dr. Winter danke ich für ihr stets freundliches Interesse an meiner Arbeit. Herrn Prof. Dr. Ehlers schulde ich Dank für zahlreiche kritische Kommentare und Anregungen. Herrn Röttgermann danke ich für die Durchsicht des Manuskriptes.

Erklärung

Diese Arbeit wurde von mir, Korbinian Strimmer, selbständig verfaßt. Wörtlich oder indirekt übernommenes Gedankengut wurde nach bestem Wissen als solches kenntlich gemacht.

München, im Juni 1994, ______________________________